Math. F. 625

Mathesis pag. 236.

R

# Mathematische Vorübungen

zum

Gebrauche

der ersten und zweyten Schule

im

Hochstift Münster.

Neue verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit gnädigsten Freyheiteu.

Münster:

bey Philipp Heinrich Perrenon, 1789.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorrede.

Gegenwärtige Vorübungen sind größten Theils aus dem Lehrbuche genommen, welches im vorigen Jahre zu Berlin ans Licht getreten ist. Die Beweise hat man dort sowohl, als auch hie weggelassen. Denn es war eben die Absicht, zärtere Köpfe, die freylich noch nicht zum strengen Erweisen aufgelegt sind, mit den mathematischen Begriffen auf eine leichte Weise bekannt zu machen. Sind diese der Jugend erst geläufig, so ist eben hier-

durch

durch schon ein wichtiger Schritt zur Theorie gemacht: denn unter andern Hindernissen, welche zu Anfange aufstossen, ist wohl jene nicht die geringste, daß durch die Menge aufgehäufter Definitionen die Achtsamkeit des angehenden Lehrlings nur allzu sehr auf die Probe gesetzet, und solcher vom fernern Fortgange in einer so edlen und gemeinnützigen Wissenschaft zurück gehalten wird.

Von der Art, die Vorlesungen über dieses Werklein einzurichten, brauche ich keine Meldung zu thun, weil solches in der neuen Schulordnung auf das genaueste bestimmet, und auf gnädigsten Landesherrlichen Befehl heraus gekommen ist.

# Mathematischer Vorübungen
## Erster Theil.

### 1. Was ist eine Größe?

Alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, oder dem man etwas hinzuthun, oder wovon man etwas wegnehmen kann.

### 2. Was ist die Mathematik?

Die Lehre von den Größen, wie sie nämlich vermehret, vermindert, mit einander verglichen und gemessen werden.

Anmerkung. Weil zu den Größen die Zahlen und Körper gehören, so sind die Lehren von beyden, oder die Arithmetik und Geometrie Theile der Mathematik.

# Arithmetik.

## Erster Theil.
### Rechnung mit ganzen Zahlen.

3. Wie werden mehrere Dinge zusammen gezählet?

Man nimmt etwas, das die gegebenen Dinge gemein haben, als die **Einheit** an, und stellet sich vor, diese Einheit sey so vielmal vorhanden, als einzelne Dinge da sind. Die Einheit mehrmals genommen macht eine **Zahl.** So haben Gänse, Enten, Hüner rc. das gemein, daß sie Federvieh, Geflügel sind. Diese Einheit also denkt man so vielmal vorhanden zu seyn, als Gänse, Hüner rc. da sind, und das nennet man **zählen.**

Anmerk. Bey mehreren Dingen, die zusammen gezählt werden, muß man sich bloß dasjenige vorstellen, was sie mit einander gemein haben, das heißt, sie müssen von einer Art seyn. Weil mehrere Dinge verschiedene Stücke gemein haben können, so kann die Einheit verschieden seyn. Z. B. für Pistolen, Ducaten und Thaler können entweder Schill., oder Ggr., oder Gl. die Einheit seyn.

4. Was ist die Arithmetik?

Die Lehre von den Zahlen, wie sie nämlich bezeichnet, vermehret, vermindert, oder unter einander verglichen werden.

5. Welches sind die Zeichen der Zahlen, und was ist von ihrer Bedeutung zu merken?

Eine jede Zahl kann nicht nur, wie ein anderer Begriff, durch ein ausgesprochenes oder geschriebenes Wort, sondern auch im Schreiben noch durch ein besonderes Zeichen ausgedruckt werden. Diese Zeichen der Zahlen sind bey allen Europäischen Völkern folgende:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Eins, | Zwey, | Drey, | Vier, | Fünf, | Sechs, | Sieben, |
| 8 | 9 | 0 | | | | |
| Acht, | Neun, | Null. | | | | |

Anmerk. Diese Zeichen der Zahlen werden Ziffern, oder schlechthin Zahlen genennet. Die meisten alten Völker bedienten sich dazu ihrer Buchstaben; die alten Römer aber hatten folgende Zeichen, denen die neueren beygefüget sind:

I. 1. II. 2. III. 3. IV. 4. V. 5. VI. 6. VII. 7. VIII. 8. IX. 9. X. 10. XI. 11. L. 50. LX. 60. C. 100. D. 500. M. 1000. MDCCLXX. 1770.

Die Bedeutung dieser Zeichen wird bestimmt 1) aus ihren vorhin gegebenen Figuren, denen die Wörter, durch welche dieselbe ausgesprochen werden, sogleich beygesetzt worden; 2) aus ihren Stellen, die in einer ganzen Reihe Ziffern erkannt werden. Von dem letztern sind insonderheit folgende Regeln zu bemerken:

1) Eine Ziffer, welche allein stehet, oder in einer ganzen Reihe die erste Stelle gegen der rechten Hand über einnimmt, bedeutet nur so viel Einheiten, als ihre Figur anzeiget, und heisset daher ein Einer. Z. E. in folgender Reihe Ziffern bedeutet die 5 nichts mehr als fünfe. 4397685.

2) Eine Ziffer, welche in einer solchen Reihe die zweyte Stelle von der Rechten zur Linken einnimmt, bedeutet zehnmal so viel Einheiten, als ihre Figur anzeiget, und heißt ein Zehner. Z. E. die 8, welche, wenn sie in der ersten Stelle stünde, ihrer Figur nach nichts mehr als achte bedeuten könnte, bedeutet jetzt, da sie in der zweyten Stelle stehet, zehnmal acht, oder achtzig. Eine Ziffer in der dritten Stelle bedeutet wieder zehnmal so viel Einheiten, als sie in der zweyten Stelle bedeutet haben würde, und heißt ein Hunderter. Z. E. die 6, welche, wenn sie in der ersten Stelle stünde, ihrer Figur nach

nichts

nichts mehr als sechse, in der zweyten Stelle aber sechsmal zehn, oder sechzig bedeuten könnte, bedeutet jetzt, da sie in der dritten Stelle stehet, zehnmal sechzig oder sechshundert. Eine Ziffer in der vierten Stelle bedeutet wieder zehnmal so viel Einheiten, als sie in der dritten Stelle bedeutet haben würde, und heisset ein Tausender, z. E. 7, welche in der dritten Stelle nur sieben hundert bedeuten könnte, bedeutet jetzt zehnmal sieben hundert oder sieben tausend. Eben so bedeutet überhaupt eine jede Ziffer zehnmal mehr, wenn sie um eine Stelle von der Rechten gegen die Linke fortgerückt wird.

Anmerk. Die Ziffern in der siebenten Stelle bedeuten Millionen, oder tausendmal tausende, in der dreyzehnten Billionen, in der neunzehnten Trillionen, in der fünf und zwanzigsten Quadrillionen ꝛc.

3) Die Null bedeutet an sich, oder, wenn sie allein steht, gar nichts; sie wird aber gebrauchet, um eine Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Ziffer steht, damit man daraus die Stellen der übrigen Ziffern in einer Reihe erkennen und darnach ihre Bedeutungen bestimmen könne. Z. E. 0 bedeutet an sich nichts, schreibt man aber dieses Zeichen hinter eine andere Ziffer, als 50, so zeiget die Null an, daß die 5 nicht als ein Einer,

sondern

sondern als ein Zehner anzusehen sey, folglich nicht fünf, sondern zehnmal fünf, oder fünfzig bedeute.

Anmerk. Es können also durch die richtige Zusammensetzung der obigen zehn Ziffern alle mögliche Zahlen, sie mögen so groß seyn, als sie wollen, ausgedruckt oder bezeichnet werden.

6. Was heißt Numeriren?

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl ihrer Bedeutung nach aussprechen, und eine ausgesprochene Zahl mit Ziffern schreiben.

7. Was ist zu beobachten, wenn eine Reihe Ziffern ausgesprochen werden soll?

1) Es wird eine ganze Reihe entweder durch besondere Zeichen, z. E. Striche, oder nur im Gedächtnisse, von der Rechten zur Linken, in Klassen abgetheilet, deren jede drey Ziffern bekömmt.

2) Wird eine jede Ziffer von der Linken gegen die Rechte nach ihrer Figur und nach ihrer Stelle, welche letztere durch die geschehene Abtheilung bestimmet worden, ausgesprochen. Z. E. die obige Reihe Ziffern ist also abzutheilen:

4|397|685.

Da man nun die Stellen aller Ziffern sogleich übersehen kann, so spricht man diese Reihe von der Linken gegen die Rechte also aus:

**aus: Vier Millionen, drey hundert sieben und neunzig tausend, sechs hundert fünf und achtzig.**

8. Was ist zu beobachten, wenn eine ausgesprochene große Zahl mit Ziffern geschrieben werden soll?

1) Es werden auf dem Papiere oder Tafel so viele Abtheilungen durch Striche oder andere Zeichen, zwischen welche allemal drey Ziffern in einer Reihe geschrieben werden können, gemacht, als die ausgesprochene Zahl erfordert, nämlich, wenn dieselbe nur Tausende enthält, so wird nur ein Strich gemacht; enthält dieselbe **Millionen**, so werden zween Striche gemacht; enthält sie **tausend Millionen**, so werden drey Striche gemacht; enthält sie **Billionen**, so werden vier Striche gemacht rc.

2) Wird eine jede ausgesprochene Zahl mit der gehörigen Figur und in die gehörige Stelle von der Linken gegen die Rechte geschrieben, die leergebliebenen Stellen werden mit Nullen ausgefüllet. Z. E. es sey die Zahl zu schreiben: Sieben tausend, drey hundert, zwey und achtzig Millionen, fünf tausend und vier und sechzig, so werden, weil tausend Millionen darinnen vorkommen, drey Striche gemacht, und die einzelnen Ziffern nebst den Nullen der drey fehlenden Stellen also zwischen die Striche gesetzet:

7|382|005|064.

Anmerk. Es ist sehr zu verhüten, daß man die Einer, welche beym Aussprechen der Zahlen vor den Zehnern, darauf sie folgen sollten, genennet werden, nicht wirklich vor dieselben setze. Z. B. in dem vorigen Exempel wird in den beyden letztern Stellen zur Rechten die 6 eher geschrieben, als die 4, ob man gleich die 4 eher ausspricht; denn 46 würde nicht vier und sechzig, sondern sechs und vierzig heissen.

9. Welches sind die Veränderungen, so mit einer Zahl vorgenommen werden können?

Es kann eine jede Zahl entweder vermehret oder vermindert werden, indem solche Einheiten, als die sind, daraus sie bestehet, entweder zu ihr hinzugesetzet oder weggenommen werden, davon insonderheit zu bemerken:

1) Die **Vermehrung** einer Zahl geschieht
   a) wenn nach Gefallen zu einer Zahl eine oder mehr andere, die ihr nicht gleich sind, gesetzt werden. Z. B. wenn zu 24 die Zahl 3 gesetzt wird. Dies nennet man **addiren**, oder die **Addition**.

Anmerk. Die Zahlen, welche addirt werden sollen, heißen die Posten, die gesuchte Zahl aber, welche den Posten zusammen genommen gleich ist, die Summe. Z. B. Hier sind 24 und 3 die Posten, die Summe aber 27.

b) Wenn

b) Wenn eine und eben dieselbe Zahl so oft zu sich gesetzt, oder addirt wird, als eine Zahl Einheiten enthält. Z. B. wenn 24 dreymal zu sich selbst addirt. Dies nennt man multipliciren, oder die **Multiplication**.

Anmerk. 1. Die Zahlen, welche multiplicirt werden sollen, heissen überhaupt die Factoren, und zwar die Zahl, welche einigemal zu sich selbst addirt wird, der Multiplicandus; die andere, welche anzeigt, wie vielmal diese Addition geschehen solle, der Multiplicator, und was auf diese Art herauskommt, das Product. Z. B. 24 soll dreymal zu sich addirt werden: so sind 24 und 3 Factoren, 24 der Multiplicandus, 3 der Multiplicator und 72 das Product.

Anmerk. 2. Durch die hiebey stehende Punkte werde eine gewisse Zahl angedeutet, und man stelle die Punkte so, daß in einer jeden Reihe sich eine gleiche Anzahl von ihnen befinde. Z. B.

. . . . .

. . . . .

. . . . .

Zählt man sie nun von oben nach unten, so erhält man 3 Zahlen fünfmal, oder 3 ist multiplicirt durch 5; zählt man sie nach der Queere, so erhält man 5 Zahlen dreymal, oder 5 ist multiplicirt durch 3. Da es nun in beyden Fällen eine gleiche Menge der Punkte, nämlich

nämlich 15 giebt: so erhalte ich das nämliche Product, ob ich 3 durch 5, oder 5 durch 3 multiplicire; und da dies allemal wahr bleibt, wenn ich in der Reihe von oben bis unten eine gleiche Anzahl der Punkte unter einander, und in der Queerreihe eine gleiche Anzahl neben einander hinstelle: so ist es willkührlich, welchen Factor ich zum Multiplicator annehme; denn allemal ist der andere der Multiplicator.

2) Die **Verminderung** einer Zahl geschieht

a) Wenn von einer Zahl eine andere nach Gefallen weggenommen wird. Z. B. wenn von 24 drey weggenommen wird. Dies nennt man **subtrahiren** oder die **Subtraction**.

Anmerk. Die Zahl, welche anzeiget, wie viel von der grössern Zahl übrig bleibet, heisset der Rest, oder die Differenz. Z. B. hier ist der Rest 21.

b) Durch das **Dividiren**, oder die **Division**. Wenn von einer Zahl eine andere so vielmal als möglich ist, abgezogen, und dadurch gefunden wird, wie vielmal sie in der ersten enthalten sey, z. E. wenn von 24 drey so vielmal, als möglich ist, abgezogen wird, welches achtmal geschehen kann; daher 3 in 24 8mal enthalten seyn muß.

Anmerk.

Anmerk. 1. Die Zahl, von welcher eine andere auf solche Weise abgezogen werden soll, heißt der Dividendus; die Zahl, welche abgezogen werden soll, der Divisor; die gesuchte Zahl aber, welche anzeiget, wie vielmal der Divisor in dem Dividendus enthalten sey, wird der Quotient genennet.

Anmerk. 2. Das Zeichen der Addition ist (†), der Subtraction (--), der Multiplication (x) oder (.), der Division (:), das Zeichen der Gleichheit zweyer Zahlen oder Größen ist (=). Z.E. 2 † 3 bedeutet, daß 2 und 3 addiret werden sollen; 5 -- 2, daß 2 von der 5 subtrahiret werden soll; 2 x 5 oder 2 . 5, daß beyde Zahlen mit einander multipliciret, und 4 : 2, oder auch $\frac{4}{2}$, daß 4 durch 2 dividiret werden soll. 2 † 5 = 7 bedeutet: die Summe von 2 und 5 ist 7.

Anmerk. 3. Eine jede Zahl, welche durchs Rechnen gefunden worden, wird überhaupt das Facit, bey weitläuftigen Rechnungen aber das Resultat genennet.

Anmerk. 4. Die vier angezeigten Arten der Veränderung einer Zahl werden die vier Species der Rechenkunst genennet.

Die

## Die vier Species in ganzen unbenannten Zahlen.

### 10. Wie werden zwo oder mehrere Zahlen addiret?

1) Es werden die gegebene Posten also unter einander gesetzet, daß Ziffern von einerley Ordnung, nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, u. s. w. unter einander kommen, unter welche ein Strich gezogen wird.

2) Werden die Ziffern, die unter einander stehen, und zwar zuerst die Einer, hernach die Zehner, alsdann die Hunderte rc. zusammen gezählet, und die Summe unter dem Strich gesetzet.

3) Werden die Zehner, welche aus den zusammen gezählten Einern entstehen, sogleich zu den gegebenen Zehnern addiret; eben so werden die Hunderte, welche aus den zusammen gezählten Zehnern entstehen, sogleich zu den gegebenen Hunderten addirt rc. Die also einzelnen gefundene Summen zusammen genommen, geben die gesuchte Summe aller gegebenen Posten. Z. E. Es sollen folgende Zahlen, welche sogleich gehörig unter einander gesetzt sind, addiret werden.

| | |
|---|---:|
| | 59027 |
| | 8493 |
| | 36765 |
| Summe | 104285 |

Die unter dem Strich gesetzte Summe ist hier also gefunden worden: 5 und 3 ist 8, (wie man an den Fingern abzählen kann) 8 und 7 ist 15. Von dieser 15 wird die 5 als ein Einer unter dem Strich in der Stelle der Einer gesetzet, die 1 aber wird zu der Ordnung der Zehner addiret, indem man sagt: 1 und 6 ist 7; 7 und 9 ist 16; 16 und 2 ist 18, davon die 8 neben die 5 geschrieben, die 1 aber zu der Ordnung der Hunderte addiret wird. Man hätte eigentlich sagen sollen: 10 und 60 ist 70 und 90 ist 160; 160 und 20 ist 180, da aber die 8 doch in die Stelle der Zehner geschrieben worden, wo sie 80 bedeutet, so war es überflüßig, die Zehner als Zehner zu nennen. Eben so werden die Hunderte nur als ein Einer addiret, da dann die Summe 12 kömmt, wovon wieder die 2 in die Stelle der Hunderte gesetzt, die 1 aber zu der Ordnung der Tausende wieder als ein Einer betrachtet, ist 24, davon die 4 unter die Tausende gesetzet, die 2 aber zu der Ordnung der Zehntausende addiret wird, deren Summe ist 10, welche beyde Ziffern hingeschrieben werden, weil in den Posten keine höhere Ziffern mehr da sind. Folglich ist die Summe aller Posten 104285.

## Exempel zur Uebung.

| | | |
|---|---|---|
| 46384 | 39426 | 759384 |
| 32965 | 5683 | 364102 |
| 78203 | 42675 | 483917 |
| 54628 | 9840 | 529436 |
| 212180 | 97624 | 2136893 |

Anmerk. Die beste Probe, ob man richtig addirt habe, ist diese: daß man das gegebene Exempel öfters, sonderlich in verschiedenen Zeiten addiret, oder von Jemanden anders nachrechnen läßt. Kömmt nun allemal dieselbige Summe, so kann man sich auf die Richtigkeit derselben verlassen. Eben dieses gilt von allen Rechnungen.

II. Wie wird eine Zahl von einer größern subtrahiret.

1) Es werden beyde gegebene Zahlen also unter einander gesetzet, daß die Ziffern von einerley Ordnung gerade unter einander zu stehen kommen, unter beyde Reihen aber wird ein Strich gezogen.

2) Wird jede Ziffer der kleinern Zahl von der Ziffer, welche in der andern Zahl dieselbige Ordnung hat, weggenommen, und der Rest unter den Strich gesetzt.

3) Wenn die Ziffer der kleinern Zahl grösser ist, als die Ziffer derselben Ordnung in der grössern Zahl: so wird von der Ziffer der nächst höhern Ordnung in der großen Zahl 1 ab-

abgenommen oder geborget, welche 1 in Ansehung der nächst niedrigen Ordnung 10 gilt, folglich wird diese 10 zu den Ziffern dieser niedrigen Ordnung addiret, und alsdann die Subtraction vorgenommen: um aber zu bemerken, daß die Ziffer der höhern Ordnung nunmehro 1 weniger gilt, wird über dieselbe ein Punkt gemacht. Steht aber in der nächst höhern Ordnung eine 0, so macht man über dieselbe nur einen Punkt, und borget alsdann von der darauf folgenden höhern Ordnung 1 oder 10, worauf die Subtraction vorgenommen werden kann, die 0 aber, über welche geborget worden, gilt nunmehr 9, weil die geborgte 1 in Ansehung der dritten niedrigen Ordnung 100 gilt: folglich, wenn davon wieder 10 genommen werden, für die 0 noch 90 oder 9 bleiben. Eben so gelten mehrere Nullen, über welche geborget worden, alle zusammen 9. Die ganze unter dem Strich geschriebene Reihe Ziffern giebt endlich den gesuchten Rest. Z. B. es sollen folgende beyde Zahlen von einander subtrahiret werden:

| | |
|---|---|
| | 486·0·49 |
| | 3517·62 |
| Rest | 134287. |

Der unter den Strich gesetzte Rest ist hier also gefunden worden: 2 von 9 weggenommen, bleibt 7, (wie man an den Fingern leicht ab-

zählen

zählen kann). Diese 7 wird unter den Strich gesetzet; 6 kann ich nicht von 4 abziehen, bey der 0 in der höhern Ordnung kann ich nicht borgen, daher wird bey der 6 **eins** geborget, dieses 1 aber gilt eigentlich **hundert**, davon wird wieder 10 geborget, folglich bleiben für die Null 90; nun addiret man diese 10 zu der 4, und sagt: 6 von 14 bleibt 8, welche unter den Strich gesetzet wird; ferner 7 von 9 bleibt 2; 1 von 5 (denn bey der 6 ist 1 geborget worden, wie der Punkt anzeiget) bleibt 4; 5 von 8 bleibt 3; 3 von 4 bleibt 1, folglich ist der ganze Rest 134287.

## Exempel zur Uebung.

| | | |
|---|---|---|
| 5·3·\|29 | 63·00·0 | 398·0·5·7 |
| 4\|36 | 51 394 | 26 5 8 9 |
| 48 93 | 11 606 | 371 4 6 8 |

Anmerk. Die Probe, ob man richtig subtrahiret habe, ist diese: daß man den gefundenen Rest zu der kleinern Zahl addire, da dann die Summe der grössern Zahl gleich seyn muß. Z. B. wenn in dem ersten Exempel der Rest 134287 zu 351762 addirt wird, so ist die Summe 486049, welches die größte Zahl ist.

12. **Wie wird eine Zahl mit einer andern multipliciret?**

1) **Wenn der Multiplicator nur eine Ziffer hat, so wird jede einzelne Ziffer des Multipli-**

tiplicandus von der Rechten zur Linken so vielmal genommen, als der Multiplicator Einheiten hat, und jedes solches einzelnes Product unter die Ziffer des Multiplicandus gesetzt, daraus es entstanden ist. Kömmt aber in solchem Product eine Ziffer einer höhern Ordnung, so wird dieselbe zu dem Producte addiret, welches aus der Ziffer der nächst höhern Ordnung im Multiplicandus entsteht. Alle diese einzelne Producte zusammen genommen, geben das ganze Product. Z. E. es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multipliciret werden:

3856
4
―――――
Product 15424

Das unter dem Strich gesetzte Product ist hier also gefunden worden. 4 mal 6 ist 24, von diesem Producte wird die 4 in die Stelle der Einer gesetzet, die 2 aber im Gedächtniß, oder wie man zu reden pflegt, im Sinne behalten. Hierauf sagt man, 4 mal 5 ist 20, wozu die im Sinne behaltene 2 addiret wird; von dem hiedurch vermehrten Product 22 wird die eine zwey unter die 5 geschrieben, die andere 2 aber im Sinne behalten. Ferner sagt man, 4 mal 8 ist 32, und 2 dazu ist 34, wovon die 4 unter die 8 gesetzet wird, die 3 aber behält man im Sinne. Endlich sagt man, 4 mal 3 ist 12, und 3 dazu ist 15, welche Zahl,

weilen keine höhere Ziffer im Multiplicandus mehr übrig ist, ganz hingeschrieben wird. Folglich ist das gesuchte Product 15424.

2) Wenn der Multiplicator mehrere Ziffern enthält, so wird zuerst das Product aus der Ziffer der niedrigsten Ordnung des Multiplicators in dem ganzen Multiplicandus gefunden, und unter den Strich geschrieben; hierauf wird auch das Product aus der Ziffer der nächst höhern Ordnung des Multiplicators in dem ganzen Multiplicandus gefunden, und unter den Strich geschrieben, aber so, daß die niedrigste Ziffer dieses Products gerade unter die andere Ziffer des Multiplicators, daraus es entstanden ist, komme. Eben so werden die Producte aus den Ziffern der folgenden höhern Ordnungen des Multiplicators in dem Multiplicandus gefunden und unter den Strich geschrieben. Endlich werden alle diese Producte in eine Summe gebracht, welche das gesuchte ganze Product giebt. Z. E. es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multiplicirer werden:

```
           4658
            342
        -------
           9316
         18632
        13974
   ------------
Product 1593036
```

Das

Das unter dem untern Strich gesetzte Product ist also gefunden worden. Das Product aus 2 in den Multiplicandus 4658 ist 9316, welches zuerst unter den obern Strich geschrieben worden. Das Product aus 4 in den Multiplicandus ist 18632, welches ebenfalls unter den Strich geschrieben worden, aber so, daß die 2 gerade unter die 4 gekommen, weil man eigentlich nicht hätte sagen sollen: 4 mal 8 ist 32, sondern 40 mal 8 ist 320 rc., daher die Stelle der Einer leer bleiben müssen. Eben so ist das Product aus der 3 in den Multiplicandus, nämlich 13974 so geschrieben worden, daß die 4 unter die 3 in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte sagen sollen: 300 mal 8 ist 2400 rc. Die Summe aus diesen dreyen einzelnen Producten aber, nämlich 1593036, ist das ganze gesuchte Product.

## Exempel zur Uebung.

```
    72835          3682
     5364        120400
  -------     ---------
   291340       1472800
  437010        7364
 218505        3682
364175        ---------
---------     443312800
390686940
```

```
     4380200
     3925::0
   ---------
   219010000
  87604
 394218
131406
------------
171922850000
```

Anmerk. Weil man das Product aus einer Ziffer in eine andere nicht sogleich an den Fingern abzählen kann, wie bey dem Addiren und Subtrahiren möglich ist: so hat man diese Producte alle in ein Verzeichniß, welches das Ein mal Eins genennet wird, gebracht. Es kann dasselbe am bequemlichsten im folgenden Täflein vorgestellet werden.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Dieses Täflein ist also verfertiget worden. Es sind die neun Ziffern in die oberste Reihe nach der Breite des Papiers und auch in die vorderste Reihe nach der Länge des Papiers herunter geschrieben worden. Hierauf ist jede Zahl in der vordersten Reihe 8 mal nach einander zu sich addiret, und in die folgenden Reihen oder Abtheilungen geschrieben worden. Z. E. 2 mal 2 ist 4, diese 4 ist neben die 2 der vordersten Reihe gesetzet; 4 und 2 ist 6, diese 6 stehet neben der 4; 6 und 2 ist 8, diese 8 stehet neben der 6 rc. Der Gebrauch dieses Täfleins bestehet darinnen, daß, wenn man das Product aus einer Ziffer in die andere, z. E. aus 6 in 8 wissen will, man die eine, als hier 6, nur in der vordersten, die andere, als hier 8, in der obersten Reihe aufsuche, alsdann aber mit einem Finger in die Reihe, die sich mit der 6 anfängt, nach der Breite des Papiers, mit dem Finger aber in der Reihe, die sich mit der 8 anfängt, nach der Länge des Papiers fortgehet. Da, wo nun beyde Finger zusammentreffen, oder in dem gemeinschaftlichen Fache beyder Reihen, stehet 48; dieses ist das gesuchte Product aus 6 in 8.

In den beyden letzten gegebenen Exempeln sind wegen der in den Factoren vorkommenden Nullen theils diese Factoren, theils ihre einzelne Producte sogleich so gesetzet worden, daß man nicht nöthig hatte, eine Menge über-

flüßiger

flüßiger Nullen zu machen, ohne doch in den Stellen der Ziffern zu fehlen.

13. Wie wird eine Zahl durch eine andere dividiret?

1) Wenn der Divisor nur eine Ziffer hat, so wird zuerst gesuchet, wie vielmal der Divisor in der ersten, oder wenn dieser kleiner ist, in den beyden erstern Ziffern des Dividendus von der Linken zur Rechten enthalten sey, d. i. es wird vermittelst des Ein mal Eins eine Zahl ausfündig gemacht, welche mit dem Divisor multipliciret, ein Product gibt, welches so groß oder nächst kleiner ist, als die erste oder beyden ersten des Dividendus. Diese Zahl, welche der erste Theil des Quotienten ist, wird hinter einem Strich neben dem Dividendus, das Product aber unter die erste oder beyden ersten Ziffern des Dividendus geschrieben und von solchen abgezogen. Hierauf wird die Ziffer der nächst niedrigen Ordnung im Dividendus, nebst solchem Rest, wenn dergleichen da ist, geschrieben, oder wie man zu reden pflegt, herunter geholt, und aufs neue gefunden, wie vielmal der Divisor in dieser Zahl enthalten sey, und der Quotient hinter den vorigen Quotienten geschrieben, worauf derselbe wieder mit dem Divisor multipliciret und das Product subtrahiret wird. Eben so wird mit den folgenden Ziffern des Dividendus verfahren. Alle einzelne

zelne Theile des Quotienten hinter dem Strich zuſammen genommen geben den geſuchten ganzen Quotienten. Z. E. es ſoll 5274 durch 2 dividiret werden, ſo iſt die Rechnung folgende:

```
2) 5274 | 2637
   4    |
   ----
    12
    12
   -----
      7
      6
   -----
     14
     14
   -----
      0
```

Der Quotient 2637, welcher anzeiget, daß die 2 in 5274 2637 mal enthalten ſey, iſt hier alſo gefunden worden: 2 iſt in 5 zweymal enthalten, denn nach dem Ein mal Eins iſt 2 mal 2 viere, welches nächſt kleiner iſt als 5. Dieſe 2 iſt als der erſte Theil des Quotienten hinter den Strich, das Product 4 aus 2 in dem Diviſor aber unter die 5 geſchrieben und von derſelben ſubtrahiret worden. Neben den Reſt 1 iſt die folgende Ziffer des Dividendus, nämlich 2, geſchrieben worden, welche mit dem Reſt 1 zuſammen 12 machet. In dieſer 12 iſt der Diviſor 6 mal enthalten, denn 2 mal 6 iſt 12; folglich iſt die 6 hinter den Strich neben die 2,

das

das Product 12 aber unter die 12 gesetzet worden. Da nun kein Rest bleibet, so ist sogleich die 7 herunter geholet worden, in welcher der Divisor 3 mal enthalten ist, folglich ist die 3 hinter den Strich, und das Produkt aus 3 in den Divisor, nämlich 6 unter die 7 geschrieben und von derselben subtrahiret worden. Endlich ist die 4 herunter geholet worden, welche mit dem vorigen Rest 14 machet. In 14 ist aber der Divisor 7 mal enthalten, folglich ist der ganze Quotient 2637.

2) Wenn der Divisor mehrere Ziffern enthält, so suchet man nur, wie vielmal die erste Ziffer des Divisors zur Linken in der ersten oder den beyden ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey, und nimmt an: weil diese erste Ziffer des Divisors die größte in derselben ist, daß der ganze Divisor eben so vielmal in den ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey, daher man solche gefundene Zahl hinter den Strich schreibet. Hierauf wird dieser gefundene erste Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliciret, und das Product von den ersten Ziffern des Dividendus subtrahiret. Sollte dieses nicht angehen, so wird der Quotient so lange um 1 vermindert, bis man das Product aus demselben in den Divisor subtrahiren kann. Neben den Rest wird die nächstfolgende Zahl des Dividendus geschrieben, und wieder gesucht, wie vielmal in der ganzen Zahl die erste Ziffer

des

des Divisors enthalten sey ꝛc. Die einzelnen Quotienten zusammen genommen, geben den gesuchten ganzen Quotienten. Z. B. es soll 75328 durch 32 dividiret werden, so ist die Rechnung folgende:

```
32) 75328 | 2354
    64    |
    ---
    113
     96
    ---
     172
     160
     ---
      128
      128
      ---
        0
```

Der Quotient 2354 ist hier also gefunden worden: 3, als die erste Ziffer des Divisors, ist in 7 zweymal enthalten, folglich ist 2 hinter dem Strich, und das Product aus 2 in 32, nämlich 64, unter die beyden ersten Ziffern des Dividendus, nämlich 75, geschrieben und subtrahiret worden. Neben den Rest ist die folgende Ziffer des Dividendus, nämlich 3, geschrieben worden. Da nun 3 in 11 dreymal enthalten ist, so ist 3 der zweyte Theil des Quotienten, das Product aus 3 in 32, nämlich 96, ist hierauf von 113 subtrahiret worden.

Exempel

## Exempel zur Uebung.

```
6) 350429 | 58404.
   30     |
   --
    50
    48
    --
     24
     24
     --
      29
      24
      --
      (5
```

```
584) 294608173 | 504466
     2920      |
     ----
       2608
       2336
       ----
        2721
        2336
        ----
         3857
         3504
         ----
          3533
          3504
          ----
          (29
```

Anmerk. 1. Wenn nach der letzten Subtraction noch ein Rest bleibet, folglich der Divisor in den Dividendus nicht völlig aufgehet, so wird solcher Rest, wie

wie in den beyden vorhergehenden Exempeln zu sehen, in eine Klammer eingeschlossen.

Anmerk. 2. Wenn der Dividendus sowohl als der Divisor am Ende Nullen haben, so können von beyden gleich viele weggestrichen werden, warauf nur die übrig gebliebene Zahlen in einander dividiret werden. Hat der Divisor allein Nullen, so können dieselben ebenfalls weggestrichen und bey der Division von dem Dividendus eben so viele Ziffern am Ende weggelassen werden. In beyden Fällen aber müssen die weggestrichene Nullen, oder ausgelassene Ziffern des Dividendus mit zum Reste gesetzt werden. Z. E. es soll 486700 mit 500, ferner 563947 mit 24000 dividiret werden. Die Rechnung ist folgende:

```
5ØØ) 4867ØØ|973        24ØØØ) 563947|23
     45     |                 48    |
     ---------                --------
      36                       83
      35                       72
     ---------                --------
       17                     (11947
       15
     ---------
      (200
```

Anmerk. 3. Wenn der Quotient mit dem Divisor multipliciret wird, so giebt das Product, wenn dazu vorhero der bey der Division gebliebene Rest addiret wird, den Dividendus, und wenn ein

ein Product mit dem einen Factor dividiret wird, so giebt der Quotient den andern Factor. Daher dienet die Multiplication und Division einander gegenseitig zur Probe. Z. B. Wenn in dem vorhergehenden zweyten Exempel der Quotient 504466 mit dem Divisor 584 multipliciret und der Rest 29 zu dem Producte addiret worden, so erhält man den Dividendus 294608173. Ingleichen, wenn in dem obigen letzten Multiplications-Exempel das Product 171922850000 mit dem einen Factor 39210 dividiret wird, so ist der Quotient 4380200 dem andern Factor gleich.

## Die benannten Zahlen.

14. Was ist von den benannten Zahlen zu bemerken?

Es werden dieselben eben so wie die unbenannten addiret, subtrahiret, multipliciret und dividiret; nur ist dabey zu bemerken, daß hier gemeiniglich verschiedene Einheiten vorkommen, daher man wissen muß, wie viel kleinere Einheiten eine größere enthält, auch die Zahlen von einerley Einheit gehören unter einander, wie aus folgendem Exempel deutlich erhellet.

## Das Addiren.

Es sollen folgende Posten, die man sogleich gehörig unter einander, nämlich Thaler unter Thaler,

Thaler, Schillinge unter Schillinge, Pfenninge unter Pfenninge gesetzt hat, addiret werden:

| Rthlr. | | Schill. | | Pf. |
|---|---|---|---|---|
| 246 | — | 18 | — | 4 |
| 520 | — | 8 | — | 7 |
| 364 | — | 12 | — | 8 |
| 472 | — | 20 | — | 3 |
| 750 | — | 14 | — | 6 |
| 2354 | — | 18 | — | 4 |

Die unter dem Strich gesetzte Summe ist folgender Maßen gefunden Es ist bekannt, daß ein Thaler 28 Schillinge, ein Schilling 12 Pfenninge enthalte. Dies voraus gesetzet, sind erstlich alle Pfenninge eben so, wie unbenannte Zahlen, in eine Summe gebracht. Die Summe war 28. Da nun diese schon Schillinge beträgt, oder einige solche größere Einheiten, deren jede aus 12 kleinern bestehet, enthält, so wurde sie durch 12 dividiret. Der Quotient 2 zeigt an, wie viel Schillinge, der Rest 4 aber, wie viel Pfenninge über 2 Schillinge in 28 Pfenningen enthalten sind. Die 4 wurde daher unter die Pfenninge geschrieben, die 2 aber zu den Schillingen addiret, deren Summe 74 betrug. Da nun diese schon Thaler, oder grössere Einheiten, deren jede aus 28 kleinern bestehet, enthält, so wurde sie durch 28 dividiret. Der Quotient 2 zeigt an, wie

viel

viel Thaler, der Rest 18 aber, wie viel Schillinge über 2 Thaler in 74 enthalten sind. Die 18 wurde daher unter die Schillinge geschrieben, die 2 aber zu den Thalern addiret, deren Summe 2354 machet.

Es kann diese Summe noch kürzer gefunden werden, wenn man sogleich bey der Addition der Zahlen einer niedrigen Ordnung, entweder durch einen Punkt, oder durch Einbeugung des Fingers bemerket, wie oft eine Einheit der höhern Ordnung vorkomme. Z. E. indem man sagt: 6 und 3 ist 9, und 8 ist 17, so sieht man gleich, daß in 17 Pfenningen ein Schilling und 5 Pf. enthalten sind; daher macht man bey der 12 in der Ordnung der Schillinge einen Punkt, oder schlägt den Finger in der linken Hand ein, die 5 aber wird zu der 7 addiret, welches wieder einen Schilling macht; daher entweder bey der 8 in der Ordnung der Schillinge wieder ein Punkt gemacht, oder noch ein Finger in der linken Hand eingeschlagen wird. Die noch übrige 4 wird hierauf unter den Strich gesetzt, die beyden Punkte aber, oder eingeschlagene Finger zeigen an, daß zu den Schillingen 2 zu addiren sey, oder beym Gebrauche der Punkte, daß anstatt 12 in der Ordnung der Schillinge 13, anstatt 8 wiederum eins mehr oder 9 zu sagen seyn. Eben so verfährt man bey der Addition der Schillinge: denn so oft hier 28 vorkommt, wird ein

Punkt

Punkt in der Ordnung der Thaler gesetzt, oder ein Finger eingebogen.

## Exempel zur Uebung.

| Cent. | | Pfund. | | Loth. | | Quent. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | — | 57 | — | 12 | — | 2 |
| 53 | — | 24 | — | 30 | — | 3 |
| 46 | — | 87 | — | 16 | — | 1 |
| 37 | — | 59 | — | 4 | — | 3 |
| 64 | — | 13 | — | 25 | — | 2 |
| 220 | — | 22 | — | 25 | — | 3 |

Bey diesem Exempel ist zu bemerken, daß 4 Quentchen ein Loth, 32 Loth ein Pfund, 110 Pfund einer Centner ausmachen.

## Das Subtrahiren.

Es sollen folgende beyde Summen von einander subtrahiret werden:

| Rthl. | | Schill. | | Pf. |
|---|---|---|---|---|
| 325· | – | 4· | – | 6 |
| 262 | – | 10 | – | 8 |
| 62 | – | 21 | – | 10 |

Dies ist also gefunden worden: zuerst soll- ten 8 Pfenninge von 6 abgezogen werden. Es wurde also von den Schillingen ein Schilling geborget; ein Schilling beträgt 12 Pfenninge, folglich wurden die 12 geborgten Pfenninge zu den

den 6 addiret, also von der Summe 18 die untenstehende 8 Pfenninge abgezogen, da dann der Rest 10 beträgt. Eben so wurden von den Thalern einer, oder 28 Schillinge geborget, und aus der Summe 31 die untenstehende 10 subtrahiret. Endlich aus 324 Thalern die untenstehende 262.

Es kann durch eine solche Subtraction insonderheit das Alter eines Menschen gefunden werden. Z. E. Es sey jemand gebohren im Jahr 1710 den 20 Junii Abends um 4 Uhr, und gestorben 1764 den 16 Nov. Morgens um 8 Uhr, so wird sein Alter also berechnet:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1763 Jahr | 10 Monat | 16 Tage | 8 Stunden. | |
| 1709 — | 5 — | 20 — | 16 — | |
| 1763 — | 9 — | 46 — | 32 — | |
| 54 — | 4 — | 26 — | 16 — | |

In der obern Reihe ist die Zeit des Todes, und darinn 10 Monat angesetzt worden, weil der November der eilfte Monat im Jahre ist; in der untern Reihe aber ist die Zeit der Geburt, und darinn 5 Monat, weil der Junius der sechste Monat im Jahre ist, ingleichen 16 Stunden gesetzet worden, weil der Tag von der Mitternacht anfängt und von da bis 4 Uhr Abends 16 Stunden verflossen sind. Bey der Subtraction der untern Reihe mußte ein Tag oder 24 Stunden geborget, und diese zu den 8

Stun-

Stunden addiret, von der Summe 32 aber 16 abgezogen worden. Ferner, da 20 Täge auch nicht von 15 können abgezogen werden: so mußte ein Monat, welcher hier 31 Täge enthält, (denn der vorhergehende Monat, welcher allemal genommen werden muß, ist hier der October, welcher 31 Täge hat,) geborget werden. Diese 31 Täge zu 15 addiret geben 46 Tage, wovon die 20 Täge unten abgezogen sind, da also 26 Täge, oder (weil 7 Täge eine Woche ausmachen) 3 Wochen und 5 Täge übrig bleiben. Folglich ist das gesuchte Alter 54 Jahr, 4 Monat, 3 Wochen, 5 Täge und 16 Stunden.

## Das Multipliciren.

Es sollen 37 Rthlr, 25 Schillinge, 8 Pfenninge mit 32 multipliciret werden.

Erstlich werden 37 Rthlr. durch 28 multipliciret, und zum Producte addiret 25; ferner werden die hiedurch gefundene 1061 Schillinge mit 12 multiplicirt und 8 dazu addirt. Dies Product wird nun durch 32 multiplicirt, das Product 407680 wird mit 12 und der Quotient mit 28 dividiret, um diese Anzahl der Pfenninge wiederum in Schillinge und Thaler zu verwandeln; wo also herauskommen wird: 1213 Thaler, 9 Schill. 4 Pf. Die Rechnung siehet so aus:

```
       37 Rthlr.   25 Schill.   8 Pf.
       28
      ----
      296
      74
       25
      ------
      1061 Schillinge.
        12
      ------
      2122
      1061
         8
      -------
      12740 Pfenninge.
         32
      -------
      25480
      38220                   28|
   ---------              ---------
12) 407680 | 33973 | 1213 Thaler.
    36     | 28    |
    ---    | ---   |
     47    |  59   |
     36    |  56   |
    ---    | ---   |
     116   |  37   |
     108   |  28   |
    ----   | ---   |
       88  |  93   |
       84  |  84   |
    ----   | ---   |
       40  |   9   | Schillinge.
       36  |       |
    ----   |       |
       (4  | Pfen. |
```

Das

# Das Dividiren.

Es sollen 324 Thaler und 21 Schillinge unter 14 getheilet werden.

Man verwandele sie wie oben in Pfenninge; die also gefundene Zahl 109116 theile man durch 14, den Quotienten durch 12, und den daraus entstandenen Quotienten durch 28: da wird heraus kommen für einen jeden 23 Thaler, 5 Schillinge, 6 Pfenninge. Die Rechnung ist folgende:

```
        324 Rthlr.   21 Schill.        Pf.
         28
       ------
       2592
       648
         21
       ------
       9093
         12
  ------------
      18186
       9093        12 |   28 |
  ------------ -------|------|
 14) 109116 | 7794 |  649 | 23 Thaler.
      98    | 72   |  56  |
     -----  |------|------|
      111   |  59  |   89 |
       98   |  48  |   84 |
     -----  |------|------|
      131   | 114  |    5 | Schill.
      126   | 108  |      |
     -----  |------|------|
        56  |    6 | Pf.  |
        56  |      |      |
     -----  |      |      |
```

## Exempel zur Uebung.

Es sollen 6312 Centner, 42 Pfund, 11 Loth durch 68 dividiret werden: der Quotient ist 92 Centner, 91 Pf. 6 Loth, 3 Quentchen.

Anmerk. Es ist weder beym Multipliciren noch Dividiren der benannten Zahlen mit einer unbenannten allemal nöthig, die höhern Einheiten in die niedrigen zu verwandeln, ja oft verlängert es nur die Rechnungen. Z. B. 40 Duc. 1 Thlr. 16 ß. sollen durch 2 multipliciret werden, so giebt es 80 Dukaten, 2 Thlr. 32 ß., oder 80 Duc., 3 Thlr. 4 ß. Sie sollen unter 4 Personen getheilet werden, so bekommt jeder 10 Duc., 7 ßl. und 4 ß., oder 10 Duc. 11 ß.

Eben so läßt sich auch das vorige Exempel bey der Multiplication besser berechnen, weil man des gedoppelten Reducirens überhoben ist.

# Mathematischer Vorübungen
## ersten Theils
### zweytes Kapitel.

### Brüche und Proportions-Regeln.

#### 1. Wie entstehet ein Bruch?

Ein Bruch entstehet, wenn eine ganze Einheit in gleiche Theile getheilet, und eine gewisse Anzahl oder Menge solcher Theile bestimmet wird.

Anmerk. 1. Es werden also zu einem Bruche allemal zwey Zahlen erfordert, davon die eine anzeiget, in wie viel gleiche Theile die ganze Einheit eingetheilet worden, die andere aber eine gewisse Menge solcher Theile bestimmet. Die erste heisset der Nenner, die andere der Zähler des Bruchs. Dieser wird im Schreiben oben, jener unter gesetzet, zwischen beyde aber ein Querstrich gemacht, z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$. Diese Brüche werden also ausgesprochen: ein halb, zwey Drittheil, drey Viertheil, vier Fünftheil, drey Zehntheil.

Anmerk.

Anmerk. 2. Die Zahl, welche bey einer Division ganzer Zahlen am Ende übrig bleibet, kann allemal mit dem Divisor in einen Bruch gesetzt werden, darinn der Rest der Zähler und der Divisor der Nenner ist, welcher Bruch dem Quotienten angehänget wird, z. E. wenn 384 mit 5 dividiret wird, so ist der Quotient 76, es bleibt aber 4 übrig, diese mit der 5 in einem Bruch gesetzet, giebt $\frac{4}{5}$; folglich ist der Quotient $76\frac{4}{5}$.

**D. Wie können die Brüche eingetheilet werden?**

1) In ächte, oder eigentliche, und unächte, oder uneigentliche Brüche. Die erstern haben einen Zähler, der kleiner ist, als ihr Nenner; die andern haben einen Zähler, der größer ist, als ihr Nenner, und enthalten also eine oder mehrere ganze Einheiten. Z. E. $\frac{2}{3}$ ist ein ächter, $\frac{5}{4}$ aber ein unächter Bruch.

2) In reine und gemischte Brüche. Die erstern haben keine ganze Zahlen vor sich, den andern sind ganze Zahlen angehängt. Z. E. $\frac{1}{2}$ ist ein reiner, $4\frac{1}{2}$ aber ein gemischter Bruch.

3) In einfache und doppelte, oder gebrochene Brüche. In den erstern sind der Zähler und Nenner ganze, in den andern aber gebrochene Zahlen. Z. E. $\frac{1}{2}$ ist ein einfacher Bruch, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ein halb Viertheil aber, imgleichen $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ ein halb von drey Viertheil, ein

dop⸗

doppelter; denn in dem vorletzten ist der Zähler, in dem letzten aber sowohl der Zähler als Nenner ein Bruch.

Anmerk. Diejenigen Brüche, deren Nenner eine Zehn, oder ein Product aus Zehnen ist, z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{12}{100}$ werden Decimalbrüche genennet. Es werden dieselben gemeiniglich also geschrieben, daß man bloß die Zähler derselben in gehöriger Ordnung hinter ein Comma setzet, vor welches entweder eine Null, oder wenn es gemischte Brüche sind, die ganzen Zahlen, dazu sie gehören, geschrieben werden, z. E. $\frac{3}{10}$ wird also geschrieben 0, 3; $\frac{12}{100}$ also 0, 12; 4, 632 ist so viel, als 4 $\frac{632}{1000}$ oder als 4 ganze $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{100}$ und $\frac{2}{1000}$. Diese Decimalbrüche sind bey den Mathematikern sehr gebräuchlich, und haben den Vortheil, daß man bey der Addition und Subtraction diese Brüche eben so, als wie ganze Zahlen behandelt. Eben dieses ist von der Multiplication und Division zu verstehen; doch hierzu sind noch besondere Regeln vonnöthen, die in den Anfangsgründen der Mathematik vorkommen werden.

3. Wie werden die Brüche in andere verwandelt, die denselbigen Werth haben?

Ein Bruch wird überhaupt in einen andern Bruch, welcher denselben Werth hat, verwandelt, wenn man den Zähler und den Nenner

desselben

desselben durch dieselbige Zahl multipliciret oder dividiret, z. E. wenn der Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 2 multipliciret wird, so entstehet daraus der Bruch $\frac{6}{8}$, welcher eben so viel gilt, als $\frac{3}{4}$, obgleich derselbe mit andern Ziffern ausgedrückt ist. Insonderheit geschieht dieses 1) durch die **Abbreviation** oder **Aufheben der Brüche**, wenn man einen Bruch, ohne Veränderung seines Werths, durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrücket. 2) Durch die **Resolution** der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths in einen andern verwandelt, dessen Nenner gegeben ist, und gemeiniglich versteht man dadurch, einen benannten Bruch in einen andern von gleichem Werthe verwandeln, dessen Nenner die Anzahl der kleinern Einheiten ist, in welche das Ganze, wovon der Bruch benannt ist, pflegt eingetheilet zu werden. Z. E. wenn man einen Bruch von einem Thaler in einen andern verwandeln soll, dessen Nenner 28 ist, folglich finden soll, wie viel derselbe Bruch an Schillingen enthalte. 3) Wenn man mehrere Brüche **unter gleiche Benennungen bringet**, oder sie so verwandelt, daß sie alle ohne Veränderung ihres Werths gleiche Nenner bekommen, und 4) durch das **Einrichten** gemischter Brüche, wenn man dieselbe in unächte reine Brüche verwandelt.

Anmerk.

Anmerk. Wenn der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciret wird, der Zähler aber unverändert bleibet, so wird der Bruch um so vielmal kleiner, als diese Zahl Einheiten enthält; wird aber der Nenner durch eine ganze Zahl, bey unverändertem Zähler, dividiret, so wird der Bruch um so vielmal grösser, als diese Zahl Einheiten enthält, z. E. $\frac{2}{6}$ ist nur halb so viel als $\frac{2}{3}$, weil der Nenner des letzten Bruchs mit 2 multipliciret worden. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciret wird, der Nenner aber unverändert bleibt, so wird der Bruch um so vielmal grösser, als diese Zahl Einheiten enthält; wird aber der Zähler mit einer ganzen Zahl bey unverändertem Nenner dividiret, so wird der Bruch um so viel kleiner, als diese Zahl Einheiten enthält, z. E. $\frac{4}{6}$ ist noch einmal so viel, als $\frac{2}{6}$, weil der Zähler dieses letzten Bruchs mit 2 multipliciret worden.

### 4. Wie wird ein Bruch abbreviirt oder aufgehoben?

Es wird sowohl der Zähler als Nenner eines Bruchs durch dieselbe Zahl dividiret. Z. E. es soll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden, so wird er durch 12 dividiret, wodurch man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhält, welcher eben so viel gilt, als $\frac{36}{48}$.

Anmerk.

Anmerk. 1. Die Zahl, durch welche ein Bruch aufgehoben werden kann, muß allemal eine ungerade Zahl seyn, wenn der Zähler und Nenner, oder einer von beyden ungerade Zahlen sind, z. E. $\frac{15}{21}$ kann nur durch 3 aufgehoben werden, $\frac{27}{36}$ durch 9, $\frac{55}{123}$ durch 11, $\frac{9}{15}$ durch 3. Sind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können sie zuweilen durch ungerade Zahlen, allezeit durch gerade, wenigstens durch 2, aufgehoben werden. Z. E. $\frac{32}{48}$ kann nur durch 3 aufgehoben werden, $\frac{12}{18}$ durch 3 und 6. Endigen sie sich in 0 oder 5, so können sie allemal durch 5 aufgehoben werden, z. E. $\frac{15}{60}$ kann durch 5 aufgehoben werden.

Anmerk. 2. Wenn man die Ziffern des Zählers, ingleichen des Nenners zusammen zählet, und die Summe eine Zahl ist der Reihe 3, 6, 9, 12, 15 u. s. w. (in welcher Reihe die nächste Zahl um 3 grösser ist, als die vorhergehende) so läßt sich der Bruch allezeit durch 3 heben. Es sey z. E. der Bruch $\frac{87}{174}$, die Summe der Ziffern des Zählers ist $8 + 7 = 15$, des Nenners $1 + 7 + 4 = 12$; man theile also 87, ingleichen 174 durch 3, so bekömmt man anstatt des Bruches $\frac{87}{174}$ einen andern, der ihm gleich ist, nämlich $\frac{29}{58}$.

Anmerk. 3. Es wird überhaupt die Zahl, durch welche ein Bruch sogleich in den möglichst kleinsten von gleichem Werthe verwandelt werden kann, oder überhaupt

haupt der größte gemeine Theiler zweyer Zahlen gefunden; wenn man die grössere Zahl a durch die kleinere b dividiret, diesen Divisor b durch den übergebliebenen Rest c dividiret, und diesen Divisor c wieder durch den übergebliebenen Rest dividirt, und auf solche Art so lange allemal den letztvorhergehenden Divisor durch den jedesmaligen Rest theilet, bis diese Division aufgehet. Und dann ist der letzte Divisor der größte gemeine Theiler des Nenners und Zählers, und überhaupt der beyden Zahlen. Bleibt aber endlich 1 übrig, so kann der Bruch gar nicht aufgehoben werden, z. E. wenn $\frac{28}{512}$ aufgehoben werden soll, so wird 512 durch 28 dividiret; da nun 4 in 8 aufgehet, so kann auch der gegebene Bruch durch 4 aufgehoben werden. So kann auch $\frac{576}{252}$ durch 36 aufgehoben werden.

5. Wie wird ein Bruch resolviret?

Es wird 1) der Zähler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner multipliciret; 2) wird das Product durch den Nenner des Bruches dividiret. Der Quotient giebt den Zähler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruche gleich ist. Z. E. es soll $\frac{2}{3}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 28 ist; oder man will wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ eines Thalers an Schillingen betrage, so wird der Zähler durch 28 mul-

multipliciret, das Product 56 demnächst durch den vorigen Nenner 3 getheilet, der Quotient $18\frac{2}{3}$ wird die Zahl in Schillingen ausdrücken. Wenn man nun den Zähler dieses Bruches wieder mit 12 multipliciret und durch 3 theilet, so wird der Quotient 8 zeigen, was $\frac{2}{3}$ eines Schillings an Hellern betragen. Eben so findet man, daß $\frac{3}{4}$ Thaler 21 Schillinge austragen. Auf die nämliche Art sind $\frac{4}{7}$ eines Centners 62 Pf. $27\frac{3}{7}$ Loth.

**6. Wie werden zween oder mehrere Brüche unter einerley Benennung gebracht?**

1) Wenn nur zwey Brüche gegeben werden, so wird eines jeden Zähler und Nenner mit des andern Nenner multipliciret, z. E. es sollen die Brüche $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so wird des ersten Bruchs Zähler und Nenner mit 4, des andern Bruchs Zähler und Nenner aber durch 3 multipliciret, dadurch erhält man die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, welche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten als $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. 2) Wenn mehrere Brüche gegeben werden, so wird entweder 1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Product aus allen Nennern der übrigen Brüche multipliciret, z. E. es sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so wird des ersten Bruchs Zähler und Nenner durch 15, des andern Bruchs Zähler und Nenner durch 10, des dritten Bruchs Zähler und

Nenner

Nenner durch 6 multipliciret, wodurch man $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$ und $\frac{12}{30}$ erhält, welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten, als die gegebenen. Oder 2) werden alle Nenner der gegebenen Brüche in einander multipliciret; dieses Product giebt den **gemeinschaftlichen Nenner.** Derselbe wird mit allen Nennern der gegebenen Brüche dividiret, die hierdurch gefundene Quotienten aber werden mit allen Zählern der gegebenen Brüche multipliciret. Die hierdurch gefundenen Producte sind die Zähler zu den Brüchen, welche alle den gemeinschaftlichen Nenner haben, und dem gegebenen gleich sind. Z. E. es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so ist die Rechnung folgende:

| 210 | | |
|---|---|---|
| 105 $\frac{1}{2}$ | 105 | 2 |
| | | 3 |
| 70 $\frac{2}{3}$ | 140 | 6 |
| | | 5 |
| 42 $\frac{3}{5}$ | 126 | 30 |
| | | 7 |
| 30 $\frac{2}{7}$ | 60 | 210 |

Der gemeinschaftliche Nenner, welcher aus dem Producte der Nenner aller gegebenen Brüche in einander entstanden ist, ist hier 210, die

Quo-

Quotienten aus allen Nennern in diesem gemeinschaftlichen Nenner sind 105, 70, 42, 30, die Producte aus allen Zählern in diese Quotienten sind 105, 140, 126, 60, folglich sind $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{126}{210}$, $\frac{60}{210}$ die Brüche, welche anstatt der gegebenen gesetzt werden können, und alle gleiche Nenner haben. Es giebt hier sehr viele Abkürzungen, welche die Uebung am bequemsten lehrt. So hätte man in obigen Beyspielen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ Anfangs in $\frac{3}{6}$ † $\frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ verwandeln können. So wird $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ verwandelt in $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{5}{16}$. Läßt sich ein Bruch aufheben, so geht dies allemal vorher $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{5}$ aufgehoben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$ oder $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ oder $\frac{15}{20}$, $\frac{12}{20}$.

7. Wie werden gemischte Brüche eingerichtet?

Es wird die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, welcher derselben angehängt ist, multipliciret, und zu dem Producte der Zähler dieses Bruches addiret. Die Summe ist der Zähler zu einem unächten reinen Bruche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu seinem Nenner hat, und dem gegebenen gemischten Bruche gleich ist. Z. E. es soll der Bruch $2\frac{3}{4}$ eingerichtet werden, so wird 2 mit 4 multipliciret und zu dem Producte 8 der Zähler 3 addiret; die Summe 11 ist der Zähler eines Bruchs, welcher 4 zum Nenner hat, folglich $\frac{11}{4}$ ist. Dieser unächte reine Bruch aber gilt eben so viel als der gemischte $2\frac{3}{4}$.

Anmerk.

Anmerk. 1. Es folget hieraus, daß ein unächter Bruch wieder in einen vermischten verwandelt werden könne, wenn man mit dem Nenner desselben seinen Zähler dividiret, und den Rest zu dem Zähler eines Bruchs macht, welcher denselben Nenner hat und dem gefundenen Quotienten angehänget wird. Dieser Quotient mit solchem Bruche giebt einen gemischten Bruch, welcher dem unächten gleich ist, z. E. es soll $\frac{21}{4}$ in einen gemischten Bruch verwandelt werden, so wird 21 durch 4 dividiret, aus dem Rest 1 und dem Nenner 4 der Bruch $\frac{1}{4}$ gemacht, und solcher dem Quotienten 5 angehänget, da dann $5\frac{1}{4}$ eben so viel als $\frac{21}{4}$ ist.

Anmerk. 2. Die gebrochenen Brüche können in einfache verwandelt werden, wenn man die Zähler der beyden Brüche, daraus ein gebrochener Bruch entstehet, und auch die Nenner derselben mit einander multipliciret, und das erste Product zum Zähler, das andere aber zum Nenner eines einfachen Bruches machet, welcher dem gebrochenen gleich ist, z. E. $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$ ist gleich $\frac{1}{8}$, und $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$ ist gleich $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; $\frac{2\frac{1}{2}}{4}$ oder $\frac{\frac{5}{2}}{4}$ oder $\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{4}$ ist gleich $\frac{5}{8}$, $\frac{2\frac{1}{4}}{4\frac{2}{3}}$ oder $\frac{13}{4}$ von $\frac{14}{3}$ ist gleich $\frac{182}{12}$ oder $15\frac{1}{6}$.

### 8. Wie wird eine ganze Zahl in einen Bruch verwandelt?

Es wird die gegebene ganze Zahl zum Zähler eines Bruchs gemacht, dessen Nenner 1 ist. Dieser Bruch ist der gegebenen ganzen Zahl gleich. Z. E. aus der 3 wird der Bruch $\frac{3}{1}$ gemacht, welcher eben so viel als 3 gilt. Ist der Nenner, den dieser Bruch haben soll, gegeben, so wird die gegebene ganze Zahl mit diesem Nenner multipliciret, das Product giebt den Zähler zu einem Bruche, welcher den gegebenen Nenner hat, und der gegebenen ganzen Zahl gleich ist. Z. E. es soll 3 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 2 ist, so wird 3 mit 2 multipliciret, das Product giebt den Zähler 6 zu dem Bruche $\frac{6}{2}$, welcher den gegebenen Nenner hat, und eben so viel als 3 gilt; denn es ist dieses eben so viel, als ob 3 zuerst wie vorhin in den Bruch $\frac{3}{1}$ verwandelt, und hierauf der Zähler und Nenner dieses Bruchs durch dieselbe Zahl 2 multiplicirt worden wäre. Insonderheit geschiehet dieses durch die Reduction, wenn eine ganze benannte Zahl in einen Bruch einer benannten Einheit von einer höhern Ordnung verwandelt wird, z. B. wenn man 3 Thaler reducirt auf $\frac{3}{5}$ einer Pistole, 12 Schill. auf $\frac{12}{28}$ des Thalers.

Anmerk. 1. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich, oder dieselben

Zahlen

Zahlen sind, z. E. $\frac{2}{2}$ $\frac{5}{5}$, ist allemal so viel als 1; ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als der Nenner, folglich ein ächter Bruch, z. E. $\frac{2}{3}$, ist weniger als 1: ein Bruch aber, dessen Zähler grösser ist, als der Nenner, folglich ein unächter Bruch, z. E. $\frac{4}{3}$ ist mehr als 1.

Anmerkung. 2. Eine jede ganze Zahl, ingleichen auch eine jede gebrochene, kann durch unzählige Brüche verschiedentlich ausgedruckt werden, z. B. 2 ist so viel, als $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$ rc., $\frac{1}{2}$ ist so viel, als $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ rc.

## Die vier Species in Brüchen.

### 9. Wie werden zwey oder mehrere Brüche addiret?

1) Wenn die gegebenen Brüche gleiche Nenner haben, so werden bloß die Zähler addiret, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist der gesuchten Summe aller gegebenen Brüche gleich, z. E. es sollen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$ addiret werden, so ist die Summe $\frac{11}{7}$, oder wenn dieser unächte Bruch in einen gemischten verwandelt wird $1\frac{4}{7}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche verschiedene Nenner haben, so werden sie erst alle unter einerley Benennung gebracht, worauf die

neuen Zähler derselben, wie vorhin, addiret werden, und diese Summe zum Zähler eines Bruchs gemacht wird, welche den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat. Z. E. es sollen $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$ addiret werden, so ist die Rechnung folgende:

| | 1008 |
|---|---|
| 336 $\frac{2}{3}$ | 672 |
| 168 $\frac{5}{6}$ | 840 |
| 144 $\frac{2}{7}$ | 288 |
| 126 $\frac{3}{8}$ | 378 |

$$\frac{2178}{1008} = 2\,\frac{162}{1008} =$$
$$= 2\,\frac{18}{112} = 2\,\frac{9}{56}$$

## Exempel zur Uebung.

Es sollen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$ addiret werden; die Summe ist $1\frac{31}{60}$.

Es sollen $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{24}$ addiret werden; die Summe ist 3.

Anmerk. Wenn gemischte Brüche addiret werden sollen, so werden zuerst die den ganzen Zahlen angehängten Brüche, hernach die ganzen Zahlen allein addiret, zu der letzten Summe aber noch die ganzen Einheiten hinzugethon, welche

welche aus der Addition der Brüche entstanden sind. Z. E. es soll $3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $6\frac{3}{4}$ addiret werden, die Summe der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ allein genommen, ist $\frac{23}{12}$ oder $1\frac{11}{12}$, die Summe der ganzen Zahl allein genommen, ist 14, folglich die Summe der gemischten Brüche $15\frac{11}{12}$. Eben so ist die Summe von $3\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{8}$, $16\frac{7}{9}$, $31\frac{5}{28}$, $43\frac{7}{73}$, gleich 100.

10. Wie wird ein Bruch von einem grössern subtrahiret?

1) Wenn die gegebenen Brüche beyde gleiche Nenner haben, so wird bloß der Zähler des kleinen Bruchs von dem Zähler des grössern subtrahiret, und der Rest zum Zähler eines Bruchs gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist die gesuchte Differenz der gegebenen Brüche. Z. E. es soll $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahiret werden, so ist die Differenz $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche verschiedene Nenner haben, so werden sie erst beyde unter gleiche Benennung gebracht, worauf der neue Zähler des kleinern Bruchs von dem neuen Zähler des grössern subtrahiret, und die Differenz zum Zähler eines Bruches gemacht wird, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat. Z. E. es soll $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahiret werden, so werden erst beyde in die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ verwandelt, und alsdann

8 von 9 subtrahiret, folglich ist die Differenz beyder Brüche $\frac{1}{12}$.

Anmerk. 1. Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiret werden soll, so wird diese ganze Zahl erst in einen Bruch verwandelt, welcher den Nenner des gegebenen Bruchs hat. Z. E. es soll $\frac{3}{4}$ von 6 subtrahiret werden, so wird 6 erst in den Bruch $\frac{24}{4}$ verwandelt, und alsdann 3 von 24 subtrahiret, folglich ist die gesuchte Differenz $\frac{21}{4}$ oder $5\frac{1}{4}$

Anmerk. 2. Wenn gemischte Brüche von einander subtrahiret werden sollen, so werden sie entweder erst beyde in unächte verwandelt, und alsdann subtrahiret, oder es wird der Bruch, welcher der ganzen Zahl, die subtrahiret werden soll, angehängt ist, von dem Bruche der grössern Zahl und hernach die kleinere ganze Zahl von der grössern abgezogen; im Fall aber, daß der Bruch der kleinern Zahl grösser ist, als derjenige der grössern, so wird von der grössern ganzen Zahl 1 geborget, in einen Bruch verwandelt, welcher den Nenner des kleinern Bruchs hat, hierauf zu demselben addiret, und endlich die Subtraction der Brüche und ganzen Zahlen vorgenommen. Z. E. es soll $2\frac{1}{4}$ von $5\frac{3}{4}$ abgezogen werden, so ist die Differenz $3\frac{2}{4}$ oder $3\frac{1}{2}$. Ferner, es soll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{1}{2}$ subtrahiret werden, so müssen entweder beyde erst in die unächte Brüche $\frac{14}{3}$ und $\frac{13}{2}$ hernach

nach in die Brüche mit gleichen Nennern $\frac{28}{6}$ und $\frac{39}{6}$ verwandelt, und alsdann die Zähler subtrahiret werden, da dann die Differenz $\frac{11}{6}$ oder $1\frac{5}{6}$ ist; oder wenn die Brüche und ganzen Zahlen allein subtrahiret werden sollen, so muß (weil der Bruch $\frac{2}{3}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$) erst 1 von der 6 geborget, dieses in den Bruch $\frac{2}{2}$ verwandelt, und dazu $\frac{1}{2}$ addiret werden, worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$ (nachdem beyde Brüche in diese mit gleichen Nennern verwandelt worden) subtrahiret und die Differenz $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der beyden ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 ist, gesetzet wird, folglich ist die gesuchte Differenz wieder $1\frac{5}{6}$.

11. Wie wird ein Bruch mit einem andern multipliciret?

Es wird der Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, ingleichen der Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern multipliciret. Das erste Product giebt den Zähler, das andere den Nenner eines Bruchs, welcher dem gesuchten Producte beyder Brüche gleich ist. Z. E. es soll $\frac{2}{4}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciret werden, so wird 2 mit 3, und 4 mit 5 multipliciret. Das erste Product 6 giebt den Zähler, das andere 20 den Nenner des Bruchs $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$, welcher das gesuchte Product ist.

Anmerk. 1. Da der Bruch $\frac{3}{5}$ nicht ein ganzes mal oder vielmal, sondern nur $\frac{3}{5}$ mal

mal genommen werden soll. d. i.: da derselbe erst in 5 gleiche Theile getheilet, und nur zwey solcher Theile genommen werden sollen: so siehet man leicht, daß das Product kleiner seyn muß, als beyde Factoren. Denn wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, vielmal nimmt, d. i. mit einer ganzen Zahl, die über 1 ist, multipliciret, so muß sie grösser werden: multipliciret man sie mit 1, so muß sie unverändert bleiben; multipliciret man sie aber mit weniger als 1, d. i. mit einem Bruche, so muß sie nothwendig kleiner werden.

Anmerk. 2. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciret werden soll, so darf man nur den Zähler des Bruchs mit dem gegebenen Ganzen multipliciren. Das Product giebt den Zähler eines Bruchs, welcher den Nenner des gegebenen Bruchs hat, und das gesuchte Product ist. Z. E. es soll $\frac{3}{4}$ mit 2 multipliciret werden; das Product ist $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$.

Anmerk. 3. Wenn gemischte Brüche multipliciret werden sollen, so müssen sie allemal erst in unächte verwandelt und alsdann auf die angezeigte Weise multipliciret werden. Z. E. es soll $3\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{7}$ multipliciret werden; das Product ist $\frac{210}{14}$ oder 15. Es soll $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciret werden; das Product ist $\frac{60}{15}$ oder 4. Man kann auch die ganzen Zahlen und Brüche, ohne sie zu verwandeln, multipliciren. Z. B.

$$\overline{6 + \tfrac{2}{3}} \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{18}{5} + \tfrac{6}{15} = \tfrac{18}{5} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{20}{5} = 4.$$

12. Wie wird ein Bruch durch einen andern dividiret?

Es wird der Divisor umgekehret, das ist, der Zähler desselben wird zum Nenner und der Nenner zum Zähler; hierauf wird derselbe mit dem Bruche multipliciret, das hierdurch gefundene Product ist der gesuchte Quotient. Z. E. es soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{2}$ dividiret werden, so wird $\frac{1}{2}$ als der gegebene Divisor umgekehret, so daß das $\frac{2}{1}$ werde; dieser Bruch wird mit $\frac{2}{3}$ multipliciret, das Product $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist der gesuchte Quotient.

Anmerk. 1. Da durch die Division eines Bruchs in einem andern nur gefunden werden soll, wie vielmal der erste in dem andern enthalten sey, oder, wenn der Divisor grösser ist als der Dividendus, der wie vielste Theil vom Divisor dem Dividendus gleich sey: so sieht man leicht, daß der Quotient nicht nur grösser als der Dividendus, sondern auch selbst eine ganze Zahl seyn könne, indem ein Bruch in einem andern etlichemal enthalten seyn kann. Denn wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, mit einer ganzen Zahl, die über 1 ist, dividiret, so muß der Quotient kleiner seyn, als der Dividendus; dividirt man sie mit 1, so muß sie unverändert bleiben,

oder

oder der Quotient dem Dividendus gleich seyn; dividiret man sie aber weniger als durch 1, d. i. durch einen Bruch, so muß der Quotient nothwendig grösser seyn, als der Dividendus.

Anmerk. 2. Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiret werden soll, so darf man nur den Nenner des Bruchs mit der gegebenen Zahl dividiren. Das Product gibt den Nenner eines Bruchs, welcher den Zähler des gegebenen Bruchs hat, und der gesuchte Quotient ist. Z. E. es soll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividiret werden; der Quotient ist $\frac{3}{8}$.

Anmerk. 3. Wenn gemischte Brüche dividiret werden sollen, so müssen sie allemal erst in unächte verwandelt, und alsdann auf die angezeigte Weise dividiret werden. Z. B. es soll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividiret werden; der Quotient ist $\frac{68}{35}$ oder $1\frac{33}{35}$. Es soll $6\frac{2}{9}$ durch $\frac{5}{8}$ dividiret werden; der Quotient ist $\frac{448}{45}$ oder $9\frac{43}{45}$. Man kann auch die gemischten Brüche, ohne sie einzurichten, durch Brüche dividiren. Z. B. $(4 + \frac{2}{3}) : \frac{5}{6} = \frac{24}{5} + \frac{12}{15} = \frac{72}{15} + \frac{12}{15} = \frac{84}{15} = 5\frac{9}{15} = 5\frac{3}{5}$.

Anmerk. 4. Hat man mit benannten Brüchen zu rechnen, so muß man sie zuvor resolviren. Z. B. $\frac{1}{3}$ Gl. × $\frac{1}{4}$ Th. = 8 Gg. × 6 Gg. = 48 Gg. = 2 Th.

Die

## Die Verhältnisse und Proportionen.

### 13. Was ist ein Verhältniß?

Eine **Vergleichung** zweyer Zahlen, oder überhaupt zweyer Größen von einerley Art, in Ansehung ihrer Größen. Z. E. wenn man die beyden Zahlen 2 und 3 gegen einander hält, oder gegen einander vergleichet, und dabey nur auf die Größe sieht, welche die eine gegen die andere hat, so nennet man diese Vergleichung derselben ein **Verhältniß**.

Anmerk. Die beyden Zahlen oder Größen, welche gegen einander gehalten oder verglichen werden, nennet man die Glieder des Verhältnisses. Diejenigen, welche man sich zuerst hiezu vorstellet oder voransetzet, wird das vorhergehende, die andere das nachfolgende Glied des Verhältnisses genannt. Ein großes Verhältniß ist, dessen Glieder in Ansehung ihrer Größe sehr von einander verschieden sind; ein kleines, dessen Glieder in Ansehung ihrer Größe nicht sehr von einander verschieden sind. Z. E. wenn 1 und 100 verglichen werden, so stehen diese beyde Zahlen in einem grössern Verhältniß, als 1 und 2. Ist das vorhergehende Glied kleiner, als das nachfolgende, so nennet man es ein steigendes Verhältniß; ist aber das vorhergehende Glied grösser, als das nachfolgende, ein fallendes.

14. Wie werden die Verhältnisse eingetheilet?

In arithmetische und geometrische Verhältnisse. Ein arithmetisches Verhältniß entstehet, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen oder Größen darauf siehet, um wieviel die eine grösser ist, als die andere; folglich wenn man durch die Subtraction der einen von der andern untersuchet, um wieviel sie von einander unterschieden sind. Ein geometrisches Verhältniß entstehet, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen oder Größen darauf siehet, wie vielmal die eine Größe grösser ist als die andere; folglich wenn man durch die Division der einen in die andere untersuchet, wie vielmal die erste in der andern enthalten ist.

Anmerk. 1. Es findet also zwischen jeden zwey Zahlen oder Größen sowohl ein arithmetisches als geometrisches Verhältniß statt, nachdem man bey ihrer Vergleichung entweder auf ihren Unterschied oder auf ihren Quotienten (den man hier gemeiniglich wird den Exponenten nennen) siehet; folglich, nachdem man sie entweder von einander subtrahiret oder in einander dividiret. Z. E. wenn man 6 und 2 mit einander vergleichet, und dabey auf die Differenz beyder Zahlen, nämlich 4 siehet, so hat man ein arithmetisches Verhältniß; siehet man aber dabey auf

auf ihren Exponenten 3, so hat man ein geometrisches Verhältniß.

Anmerk. 2. Ein arithmetisches Verhältniß zwischen zween Zahlen wird dadurch bezeichnet, daß man zwischen beyde einen Strich machet, ein geometrisches aber dadurch, daß zwischen beyde zwey unter einander stehende Punkte gesetzet werden. Z. E. 6 — 2 zeiget an, daß 6 und 2 in ein arithmetisches, 6 : 2 aber, daß beyde Zahlen in ein geometrisches Verhältniß gesetzet worden.

15. Was ist eine Proportion?

Eine Gleichheit zweyer Verhältnisse, welche darinn bestehet, daß beyde Verhältnisse einerley Differenz oder einerley Exponenten haben. Z. E. die vier Zahlen 6, 3, 4, 2 stehen in einer geometrischen Proportion, weil die beyden ersten sowohl als die beyden letzten, wenn man sie in Verhältnisse setzt, einerley Exponenten 2 haben.

Anmerk. 1. Die vier Zahlen, welche in einer Proportion stehen, werden unter einander proportionirte Zahlen genannt; die erste und vierte Zahl (folglich das vorhergehende Glied des ersten, und das nachfolgende des letztern Verhältnisses) werden die äussern, die zweyte und dritte Zahl aber (folglich das nachfolgende Glied des ersten, und das vorhergehende des letztern Verhältnisses) werden die mittlern Glieder der Proportion genennet.

Anmerk. 2.

Anmerk. 2. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse wird durch zwey unter einander gezogene Striche, welche man zwischen die mittlern Glieder der daraus entstehenden Proportion machet. Z. E. 2 : 4 = 3 : 6 zeiget an, daß die beyden geometrischen Verhältnisse 2 : 4 und 3 : 6 einander gleich sind; folglich diese vier Zahlen in einer Proportion stehen. Diese Zeichen werden im Reden also ausgedrücket: 2 verhält sich so zu 4, wie 3 zu 6.

16. Wie werden die Proportionen eingetheilet?

In arithmetische und geometrische Proportionen. Die ersten bestehen aus zwey gleichen arithmetischen, die andern aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen. Z. E. 3 — 1 = 4 — 2 ist eine arithmetische, aber 2 : 4 = 3 : 6 eine geometrische Proportion.

Anmerk. 1. Wenn in einer Proportion die beyden mittlern Glieder einerley Zahl sind, folglich das nachfolgende Glied des ersten Verhältnisses mit dem vorhergehenden des andern Verhältnisses einerley ist, so wird die Proportion stetig oder zusammenhangend genannt, und die Zahl, welche in beyden mittlern Gliedern vorkommt, wird die mittlere Proportionallinie zwischen den Zahlen, welche die beyden äussern Glieder sind, genennet. Z. E. 2 : 4 = 4 : 8 ist eine stetige Proportion, und

und 4 die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 2 und 8.

Anmerk. 2. Wenn die Ausdrücke: Verhältniß, Proportion und Progreßion ohne Beysatz gebrauchet werden, so wird allemal die geometrische Verhältniß, Proportion und Progreßion verstanden, weil diese häufiger vorkommen, als die arithmetischen.

17. Welches sind die allgemeinen Eigenschaften der Proportion?

1) In arithmetischen Proportionen ist die Summe der äußern Glieder allemal der Summe der mittlern Glieder gleich. Z. E. wenn in den Proportionen 3 — 2 = 6 — 5 die beyden äußern Glieder 3 und 5 addiret werden, so ist die Summe 8; eben dieselbe Zahl wird gefunden, wenn man die beyden mittlern Glieder 2 und 6 addiret.

2) In geometrischen Proportionen ist das Product aus den äußern Gliedern allemal dem Producte aus dem mittlern gleich. Z. E. wenn in der Proportion 2 : 6 = 3 : 9 das erste Glied 2 mit dem letztern Glied 9 multipliciret wird, so ist das Product 18. Eben dieselbe Zahl wird gefunden, wenn man die mittlern Glieder 6 mit 3 multipliciret.

Die

## Die Regel de Tri.

18. Was ist die Regel de Tri?

Eine Vorschrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen, welche nebst einer vierten, die unbekannt ist, in einer geometrischen Proportion stehen, diese vierte unbekannte Zahl gefunden werden kann.

19. Wie vielerley ist die Regel de Tri?

Zweyerley: die gerade oder directe, wenn sich die erste Zahl verhält zur dritten, wie die zweyte zur vierten. Die umgekehrte, wenn sich die dritte Zahl verhält zur ersten, wie die zweyte zur vierten. Wenn mehr als drey Zahlen verschiedenen Proportionen gegeben werden, so ist die Regel de Tri zusammengesetzt.

Anmerk. Die dritte Zahl nennt man hier jene, welche die Fragen bey sich hat, und die Zahl, welche mit ihr von gleicher Art ist, die erste, die noch übrige gegebene, die zweyte. So ist im folgenden Beyspiele 9 die dritte Zahl, 3 die erste, und 7 die zweyte. Dieses dienet zur Regel, wenn in der Aufgabe die Zahlen oder Glieder durch einander geworfen sind. Z. B. wie viel werde ich für 9 Ellen geben müssen, wenn 7 Ellen 3 Thaler kosten?

20. Worinn

20. Worinn bestehet die directe und einfache Regel de Tri?

Ueberhaupt in folgenden: 1) man stelle die Glieder oder Terminos nach Angebung der Frage in ihre gehörige Ordnung. 2. Man multiplicire das dritte Glied durch das zweyte, und theile das Product durch das erste, so wird der vierte Terminus X herauskommen.

## Erstes Exempel.

Wenn 3 Ellen kosten 7 Rthl. was kosten 9?

$$3 : 7 = 9 : x.$$

9
7
3) 63|21 Rthl.

Also ist der vierte Terminus 21, oder 9 Ellen kosten 21 Rthlr.

Ob man die Glieder in gehörige Ordnung gestellet hat, muß aus der Aufgabe selbst und der Zusammenhaltung derselben mit dem gefundenen vierten Termino beurtheilet werden. Ob man aber richtig multipliciret und dividiret hat, erhellet aus folgender Probe.

## Die Probe.

Man multiplicire den ersten und vierten, ingleichen den zweyten und dritten Rthlr. Wenn die Producte gleich sind, so ist richtig gerechnet.

## Zweytes Exempel.

Wenn 2 Pf. und 12 Loth Gewürz kosten 15 Rthl. 24 Schillinge, was werden 5 Pf. 30 Loth kosten?

```
  15            32
  28             2
 ----        ------
 120            64
  30            12
 ----        ------
 420            76 Loth; dieses ist 2 Pf.
  24                            12 Loth.
 ----
 444 Schillinge sind 15 Rthl. 24 Schill.
            32
             5
         ------
           160
            30
         ------
           190 Loth sind 5 Pf. und 30 Lth.
```

also:

$$76 : 444 = 190 : x$$

```
          190
        -------
        39960
         444
     ------------
     76) 84360 | 1110
         76    |
        -------
          83
          76
        -------
           76
           76
```

folglich 1110 Schillinge, welche demnächst wiederum zu Thalern gemacht werden müssen.

21. Worinn bestehet die umgekehrte Regel de Tri?

Wenn aus den Umständen der Frage bekannt ist, daß solche gebraucht werden müsse, so wird Folgendes beobachtet: Dem Terminus, welcher die Frage bey sich hat, gebe man die erste Stelle, den beyden übrigen die zweyte und dritte, (was für eine gilt gleich) und verfahre, wie vorhin.

## Erstes Exempel.

100 Arbeiter werden binnen 8 Tägen fertig; binnen welcher Zeit werden 50 fertig werden? Je weniger Arbeiter vorhanden sind, destomehr Täge werden sie nöthig haben; oder würde man hier die directe Regel anwenden, so würde der vierte Terminus 4 Täge geben, welches keinen Platz finden kann, wenn 100 acht Täge vonnöthen haben. Man braucht also die umgekehrte Regel.

$$50 : 100 = 8 : x$$

$$\begin{array}{c|c|l} & 8 & \\ \hline 5\not{0} & 80\not{0} & 16 \text{ Täge.} \\ & 5 & \\ \hline & 30 & \\ & 30 & \\ \hline \end{array}$$

E Zweytes

## Zweytes Exempel.

125 Soldaten kommen 10 Täge mit ihrem Vorrathe aus; wie lange werden damit 625 auskommen?

625 : 125 = 10 : X. $\frac{1250}{625}$ = 2 Täge.

22. In welchen Fällen läßt sich die Rechnung abkürzen?

1) Wenn der erste und zweyte Terminus, oder auch der erste und dritte Terminus sich durch eine andere Zahl so theilen lassen, daß die Theilung aufgehet, so kann man die Theilung vorher verrichten. Z. E.

5 Ellen kosten 20 Rthl.; was kosten 17?

5 : 20 = 17 : x
1 : 4 = 17 : x

Folglich werden 17 kosten 17 × 4 = 68 Thlr.

Ein Laufer läuft 100 Meilwegs binnen 8 Tägen; in wie viel Zeit wird er 25 Meilwegs abgemacht haben?

100 : 8 = 25 : x
4 : 8 = 1 : x
x = $\frac{8}{4}$ = 2 Täge.

2) Wenn Brüche vorkommen, so kehre man den ersten Bruch um, und multiplicire die Zähler und Nenner durch einander. Z. E.

$\frac{1}{2}$ Pfund

$\frac{1}{2}$ Pfund kostet $\frac{5}{6}$ eines Thalers; was kosten $\frac{3}{4}$ Pfund.

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{30}{24} = 1\frac{6}{24} = 1\frac{1}{4}.$$

3) Wenn der erste und zweyte, oder auch der erste und dritte Terminus gleiche Nenner haben, so können sie ausgelassen werden. Z. E.

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : x$$
$$1 : 2 = \frac{3}{4} : x$$
$$x = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

4) Wenn der erste Terminus um eins grösser ist als der zweyte, so findet man den vierten, wenn der dritte durch den ersten getheilet, und der Quotient alsdann vom dritten abgezogen wird. Ist der erste um eins kleiner, so muß der Quotient zum dritten addiret werden. Dieser Vortheil läßt sich nicht selten in der Münzreduction anbringen. Z. E: 6 Thaler Köllnisch macht an hiesigem Gelde 5 Thaler; was werden 40 Thaler Köllnisch machen?

$$6 : 5 = 40 : x$$
$$x = 40 - \frac{40}{6} = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3} \text{ Thlr.}$$

Wiederum 6 Thaler in hiesigem Gelde betragen anderswo 7 Thaler; was werden 36 Thaler hiesigen Geldes dorten betragen?

$$6 : 7 = 36 : x$$
$$x = 36 + \frac{36}{6} = 42.$$

## Die zusammengesetzte Regel de Tri.

23. Was ist die Regula Quinque?

Wenn fünf Termini gegeben werden, und der sechste gesucht wird. Z. E. 600 Thaler geben in 6 Jahren 50 Procent; was geben 1600 in 4 Jahren?

24. Worinn bestehet die Regula Quinque?

Hier kommen Begriffe von Ursach, Würkung und Zeit vor. Man unterscheide die angegebene Ursachen, Zeiten und Würkungen von jenen, welche die Frage bey sich führen. Man nenne also die gegebene Würkung = E, ihre Ursache = C, ihre Zeit = T, die verlangte Würkung = e, ihre Ursache = c, die zugehörige Zeit = t, so ist

$$e \times C \times T = E \times c \times t.$$

$$\text{und } e = \frac{E \times c \times t.}{C \times T.}$$

Hieraus entstehet diese Regel: Man multiplicire durch einander 1) die gegebene Würkung, Zeit und Ursache der verlangten Würkung. 2) Zeit und Ursache der gegebenen Würkung. 3) Man theile das erste Product durch das zweyte, so ist der Quotient die verlangte Würkung. Aehnlichermaßen verfährt man, wenn Zeit oder Ursache verlanget wird, wie aus beygefügten Exempeln erhellet.

$$\text{Es ist nämlich } c = \frac{e \times C \times T}{E \times t}$$

$$t = \frac{e \times C \times T}{E \times c.}$$

## Erstes Exempel.

600 Thaler geben in 6 Jahren 50 Procent, was werden 1600 Thaler in 4 Jahren austragen?

$$C = 600$$
$$T = 6$$
$$E = 50$$
$$c = 1600$$
$$t = 4$$
$$e = x$$

$$c = \frac{E \times c \times t}{CT} = \frac{50 \times 1600 \times 4}{600 \times 6} = \frac{50 \times 16 \times 4}{36} = \frac{800}{9}$$

$$= 88\tfrac{8}{9} \text{ Thaler.}$$

## Zweytes Exempel.

Ein Pflug kann in einem Tage 2 Morgen Acker umpflügen; wie viel Pflüge werden erfordert, um 144 Morgen in 6 Tagen umzupflügen?

$$C = 1$$

$$C = 1$$
$$T = 1$$
$$E = 2$$
$$c = x$$
$$t = 6$$
$$e = 144$$

$$x = \frac{eCT}{Et} = \frac{144 \times 1 \times 1}{2 \times 6} = 12 \text{ Pflüge.}$$

## Drittes Exempel.

Ein Capital von 100 Thaler giebt in einem Jahre 5 Thaler Procent; wie viel Zeit wird vorbeygehen, bis ein Capital von 3000 Thalern 900 an Zinsen einbringet?

$$C = 100$$
$$T = 1$$
$$E = 5$$
$$c = 3000$$
$$t = x$$
$$e = 900$$

$$t = \frac{eCT}{Ec} = \frac{900 \times 100 \times 1}{5 \times 3000} = \frac{90}{15} = 6$$

Anmerk. Der Grund dieser Formeln wird anderswo erwiesen werden. Sie haben den Vortheil zum voraus, daß man nicht erst nachzufragen brauche, ob die Regel direkt oder umgekehrt sey. Die Probe der richtigen Rechnung wird

wird daraus offenbar, daß wiederum herauskommen müsse: $eCT = Ect.$

Als im letzten Exempel:

$$eCT = 900 \times 100 \times 1 = 90000$$
$$Ect = 5 \times 3000 \times 6 = 15000 \times 6 = 90000.$$

Anmerk. Der Gebrauch dieser Formel kommt in sehr vielen Fällen vor, auch wo nicht eben würkende Ursachen und Würkungen vorhanden sind, aber doch Dinge, die sich eben so verhalten. Z. B. wenn man für 15 Centner, 18 Meile zu fahren, 10 Thaler zahlet, wie weit könnte man 28 Centner für 25 Thaler fahren lassen? Betrachtet man 15 Centner als C, 18 Meile als T, 10 Thaler als E, 28 Centner als c, 25 Thaler als e: so ist

$$t = \frac{e.CT.}{E.c} = \frac{25.15.18}{10.28} = \frac{5.15.9.}{2.14} = \frac{675}{28} = 24\tfrac{3}{28} \text{ Meilen.}$$

## Die Gesellschaftsregel.

25. Was ist die Gesellschaftsregel?

Wenn mehrere Glieder zusammenlegen, um daraus einen Gewinn zu ziehen, und nach einer verflossenen gewissen Zeit ein jeder nach Angabe des Beytrags seinen Gewinn bekömmt.

27. Worinn

26. Worinn bestehet diese Regel?

Man setze die Summe der Auslage und des ganzen Gewinns zum ersten und zweyten Terminus; zum dritten, was ein jeder vor sich dazu hergegeben, und so oft muß dieses wiederholt werden, so viel in der Gesellschaft vorhanden sind.

## Exempel.

Drey Kaufleute haben zusammen gelegt 1000 Thaler. Sie haben damit gewonnen 2000. Der erste hat dazu gegeben 240. Der zweyte 300. Der dritte 460.

$$1000 : 2000 = 1 : 2 = 240 : x \ldots x = 480.$$
$$1000 : 2000 = 1 : 2 = 300 : y \ldots y = 600.$$
$$1000 : 2000 = 1 : 2 = 460 : z \ldots z = 920.$$
$$x + y + z = 2000.$$

Anmerk. Hätte einer das Geld eine längere Zeit in dem Handel stehen gehabt, als der andere: so müßte die Einlage durch die Zeit multipliciret werden, und demnächst fortgefahren werden, wie vorhin.

## Exempel.

Der erste Kaufmann hat in den Handel

| | Thaler. | Monate |
|---|---|---|
| gesteckt: | 100 | 19 |
| der 2te | 130 | 10 |
| der 3te | 300 | 6 |

sie haben nach 9 Monaten gewonnen 10000.
Es war also die Einlage des ersten = 1900

| | |
|---|---|
| des ersten | = 1900 |
| des 2ten | = 1300 |
| des 3ten | = 1800 |
| also in allem | = 5000 |

$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1900 : x \ldots x = 3800$$
$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1300 : y \ldots y = 2600$$
$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1800 : z \ldots z = 3600$$
$$x + y + z = 10000$$

Die andern Regeln der Rechenkunst werden viel bequemer in der Algebra abgehandelt.

## Ende der Rechenkunst.

Ma-

# Mathematischer Vorübungen zweyter Theil.

## Buchstaben-Rechnung.

### Erstes Kapitel.

### Reduction, Addition, Subtraction buchstäblicher Größen.

#### 1. Was ist eine buchstäbliche Größe?

Der Ausdruck einer Zahl, oder andern Dinges, das sich messen lässet, in Buchstaben. Z. B. so kann 100 ausgedruckt werden durch a, 20 durch b u. s. f.

Anmerk. Die Zeichen der Addition ꝛc. sind die nämlichen, deren schon vorhin Erwähnung geschehen. Also kann man aussprechen: $a + b$, $c - d$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$. Wenn zween oder mehr Buchstaben neben einander stehen, so wird dadurch auch die Multiplication verstanden: so ist ab so viel als $a \times b$.

2. Was

2. Was sind entgegengesetzte Größen?

Größen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß eine von der andern vermindert wird. Z. B. Vermögen und Schulden. Denn das Vermögen wird durch hinzukommende Schulden, dagegen werden die Schulden durch hinzukommendes Vermögen vermindert. Eine von diesen Größen, welche man will, heißt man positiv, und die ihr entgegengesetzte nennt man alsdann negativ.

Anmerk. Man kann die negative Größe als etwas, was von der positiven abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen -- bezeichnen, wenn die positive † hat. So machen 3 Thaler Schulden und 7 Thaler Vermögen † 7 -- 3 Thaler Vermögen, oder 4 Thaler Vermögen. Eben so machen 5 Thaler Vermögen und 9 Thaler Schulden 5 -- 9 Thaler Schulden. Und in diesem Falle wird die positive Größe von der negativen übertroffen. Das heißt: die positive Größe verzehrt so viel von der negativen, als sie beträgt, und bleibt also etwas von der negativen mit ihrem Zeichen übrig 5 -- 9 = 5 -- 5 -- 4 = -- 4. Das ist 5 Vermögen und 9 Schulden, machen das entgegengesetzte von 4 Thaler Vermögen, oder 4 Thaler Schulden.

3. Was

### 3. Was sind die Coefficienten?

Zahlen, welche anzeigen, wie oft der Buchstabe, der eine Größe ausdruckt, vorhanden sey, z. E. 3a, 2b u. s. f. Wo keine Zahl vorsteht, wird 1 darunter verstanden; denn a ist so viel als einmal a oder 1 × a.

### 4. Was sind gleichartige oder gleichnamige Größen?

Die Größen sind **gleichartig**, wenn eben dieselben Buchstaben da sind, und eben dieselben Buchstaben zu Factoren und Divisoren haben, als 2ab. — ab, ba, ab, $\frac{4a}{a}$ — $\frac{2a}{a}$

**Ungleichartig** sind sie, wenn nicht eben dieselben Buchstaben da sind, und nicht eben dieselben Buchstaben zu Factoren und Divisoren haben, wie bc, ed; ab, ac, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$, 2a aa.

Auch sind sie ungleichartig, wenn sie einerley Buchstaben zu Factoren und Divisoren haben, der Divisor aber einen Coefficienten vor sich hat, als $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{2a}$

Das

## Das Reduciren.

4. Wie soll man die Buchstabengrößen reduciren, oder zum kürzesten Ausdrucke bringen?

Man beobachtet dabey folgende Regeln:

1. Man setze die Buchstaben nach der Ordnung des Alphabets. Z. E. anstatt cd + ad + a + ab + bb schreibt man: a + ab + ad + bb + cd.

2. Wenn mehrere gleichartige Größen mit dem nämlichen Zeichen vorkommen, so zähle man sie zusammen. Z. E. anstatt ab + ab + bc + bc schreibt man 2 ab + 2 bc. Oder auch anstatt — cd — cd — d — d — d schreibt man — 2 cd — 3 d.

3. Wenn die Zeichen gleichartiger Größen verschieden sind, das ist: wenn die eine das Zeichen + die andere — vor sich hat, so sind noch drey Fälle zu bemerken. 1) Wenn dasjenige, was hinter dem Zeichen sich befindet, beyderseits gleich ist, so wird es schlechtweg ausgelassen, weil es gegen einander aufgeht, oder nichts ist als 3 — 3 = 0 2 ab — 2 ab = 0. 2) Wenn dasjenige, was hinter dem Zeichen + stehet, größer ist, so wird die kleine Zahl aus der größern subtrahirt, und der Ueberrest unter dem Zeichen + hingeschrieben; z. E. 5 ab — 3 ab = 2 ab. 3) Wenn dasjenige,

ge, was hinter dem Zeichen — stehet, grösser ist, so wird wiederum die kleine Zahl von der grössern abgezogen, und der Rest unter dem Zeichen — hingeschrieben. Z. E. 3cd — 8cd = — 5cd.

Anmerk. Die Ursache dieses Verfahrens erhellet aus der Anmerk. 2.

## Erstes Exempel.

Man soll reduciren c + a + c — a + b + b — b — b — b — c, so schreibt man:

I. a — a + b + b — b — b — b + c + c — c

II. a — a + 2b — 3b + 2c — c.

III. — b + c.

## Zweytes Exempel.

cd + abc — c + abc + d + c + aa — a cd — cd.

I. aa — a + abc + abc — c + c + cd - cd - cd + d.

II. aa — a + 2abc — c + c + cd — 2cd + d.

III. aa — a + 2 abc — cd + d.

## Das Addiren.

6. Was ist bey der Addition zu beobachten?

Man muß aus den Buchstabengrößen eine Summe machen. Dies geschiehet, wenn man die nicht gleichartigen Größen mit ihren Zeichen hinschreibt, und die gleichartigen zum kürzern Ausdrucke bringet, wie gezeigt werden soll.

## Exempel.

I. Zu $3a - b + 4f - 3g$ sollen addiret werden: $2a - 5b + 2f - 2g$

Summe $5a - 6b + 6f - 5g$.

II. Zu $6a - 4b + 3f - g$ soll addiret werden: $3a + 5b - 8f + g$

Summe $9a + b - 5f$.

III. Zu $2a - b + 3g$ soll addiret werden: $4a + 3b - h$

Summe $6a + 2b + 3g - h$.

Man kann sich dieser Rechnung auch in Zahlen bedienen. Wenn jemand z. E. nach Empfang und Ausgabe wissen wollte, wie viel er noch würklich im Vermögen hätte.

Hier kann der Empfang durch + die Ausgabe durch − ausgedruckt werden. Z. E.

Ja

Jemand hat empfangen 20 Th. 4 Schill. 8 Pf. er hat ausgegeben 12 Th. 12 Sch. 9 Pf. so würde das Exempel also stehen:

| Thaler. | | Schill. | | Pf. |
|---|---|---|---|---|
| 20 | + | 4 | + | 8 |
| —12 | — | 12 | — | 9 |
| 8 | — | 8 | — | 1 |

Er hätte folglich 8 Thaler; müßte aber davon ausgeben 8 Schill. 1 Pf. Es wäre also sein Vermögen 7 Th. 19 Sch. 11 Pf.

## Das Subtrahiren.

7. Wie soll man buchstäbliche Größen von einander subtrahiren?

Reg. I. Die Zeichen der Größe, welche subtrahirt werden soll, werden verändert, nämlich + in — und — in +: demnächst geschiehet die Reduction wie vorhin.

## Exempel.

I. Aus $5a - 3b + f - 9h$ soll subtrahirt werden: $2a + 3b + f - 8h + g$

Man ändre die Zeichen

$$-2a - 3b - f + 8h - g$$

Die erste und dritte Reihe reduciret.

$$3a - 6b - h - g$$

Anmerk. Es läßt sich die Operation abkürzen, wenn man die veränderten Zeichen unter dem Buchstaben schreibt, die reduciret werden sollen, und sofort die Reduction verrichtet.

Voriges Exempel käme also zu stehen:

Aus $5a - 3b + f - 9h$ wird subtrahiret
$2a + 3b + f - 9h + g$

Aenderung der Zeichen

$- \quad - \quad - \quad + \quad -$

Reduction und Rest

$3a - 6b - h - g$

II. Aus $6ab - 2cd + 3dh + h - m$
soll subtrahiret werden:

$4ab - 6cd + 5dh + n.$

Zeichen geänd. $- \quad + \quad - \quad -$

Rest $2ab + 4cd - 2dh + h - m - n$

Anmerk. 1. Daß die Zeichen geändert werden müssen, ist bey bejahenden Größen offenbar. Bey verneinenden erhellet es aus folgendem: Es soll $-10 = -b$, oder ein erlittener Verlust von 10, von der ganzen Summe $90 = a$, die einer nach erlittenem Verluste hat, abgezogen werden: so hat er denn, bevor er verlor, $90 + 10 = a + b$

:F gehabt

gehabt; davon verlor er 10 == b, also hätte er noch 90 † 10 -- 10 == a † b -- b. Nun soll der Verlust -- 10 == -- b weggenommen werden, also kommt 90 † 10 == a † b, und folglich ist a -- (-- b) == a † b.

Man soll -- 4 von † 7 abziehen. Man drücke † 7 aus durch == † 7 -- 4 † 4 Von der solchergestalt ausgedruckten † 7 nehme man -- 4 weg, so bleibt † 7 † 4. Also ist † 7 -- (-- 4) == † 7 † 4.

Anmerk. 2. Man kann sich auch dieser Rechnung in Zahlen bedienen, wenn nämlich die Frage entstehet, was noch zu bezahlen übrig sey, wenn eine Summe bezahlt werden muß, und darauf schon etwas bezahlt wäre. Z. E. Es müßte jemand bezahlen 20 Thaler, 14 Schill. 6 Pf.; er hätte darauf bezahlt 12 Th. 18 Sch. 8 Pf. so stünde das Exempel also:

| Thaler. | | Schill. | | Pf. |
|---|---|---|---|---|
| 20 | ✠ | 14 | ✠ | 6 |
| 12 | ✠ | 18 | ✠ | 8 |
| — | | — | | — |
| 8 | — | 4 | — | 2 |

Das ist: es müßte derselbe 8 Thaler annoch bezahlen, bekäme aber 4 Schill. 2 Pfen. zurück.

II.

II. Jemand hat an Waare empfangen

| | Cent. | | Pfund. | | Loth. | | Quent. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 17 | — | 10 | + | 4 | + | 3 |
| davon verkauft | 12 | + | 5 | + | 16 | — | 4 |
| | — | — | | — | | + | |
| folglich vorräthig | 5 | — | 15 | — | 12 | + | 7 |

Man sieht hieraus, daß durch diese Art zu rechnen die mühsame Reduction der größern Einheiten auf die geringern ersparet werde; daher dies Verfahren selbst bey vielen Rechnungen, die im gemeinen Leben vorkommen, mit Bequemlichkeit gebraucht wird.

# Mathematischer Vorübungen
## zweyten Theils
### zweytes Kapitel.

## Multiplication und Division buchstäblicher Größen.

### 1. Was sind complexe Größen?

Solche, die mit den Zeichen + oder — zusammenhangen; also sind ab + c — d complexe Größen. Die also nicht zusammenhangen, sind incomplex oder einzeln. Z. E. abcd, oder auch $\frac{ab}{cd}$.

### 2. Welche Regeln sind bey der Multiplication zu beobachten?

I. In Absicht der Zeichen: 1) Positiv multipliciret durch positiv giebt ein positives Product. 2) Positiv durch negativ, oder negativ durch positiv giebt ein negatives Product. 3) Negativ durch negativ giebt ein positives Product. Kürzer: einerley Zeichen geben + verschiedene. —

II. Die Coefficienten richten sich nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst.

III. Die Buchstaben werden neben einander hingeschrieben.

IV. Ist eine complexe Größe durch eine einfache zu multipliciren, so werden alle Glieder von jene durch diese multipliciret. Complexe Größen werden durch einander multipliciret.

V. Wenn eine Reduction statt findet, so muß sie allezeit vorgenommen werden.

## Exempel I.

### Von einfachen Größen.

| | |
|---|---|
| 1. Man soll | 3ac |
| multipliciren durch | 5cd |
| Product | 15accd. |

| | |
|---|---|
| 2. Man soll | —8ad |
| multipliciren durch | 4cde |
| Product | —32acdde. |

| | |
|---|---|
| 3. Man soll | —2ac |
| multipliciren durch | — bd |
| Product | + 2abcd. |

Exempel

## Exempel II.

### Complexe durch einfache.

1. Man soll $3ab - 2d$
multipliciren durch $6b$

Product $18abb - 12bd.$

2. Man soll $3ab - 4cd + def.$
multipliciren durch $2mn$

Product $6abmn - 8cdmn + 2def.mn.$

3. Man soll $-2ab + 3cd - gf$
multipliciren durch $-4bc$

Product $8abbc - 12bccd + 4bcfg.$

## Exempel III.

### Complexe durch complexe.

1. Man soll $a + b$
multipliciren durch $a + b$

Den obern Factor multipliciret durch a
durch b

I. Product $aa + ab$
II. Product $ab + bb$

Ganzes Product reducirt $aa + 2ab + bb.$

2. Man

2. Man soll $a - b$
multipliciren durch $a - b$

Den obern Factor multipliciret durch a
durch b

| | |
|---|---|
| I. Product | $aa - ab$ |
| II. Product | $- ab + bb$ |
| Ganzes Product | $aa - 2ab + bb.$ |

3. Man soll $a + b$
multipliciren durch $a - b$

| | |
|---|---|
| I. Product | $aa + ab$ |
| II. Product | $- ab - bb$ |
| Ganzes Product | $aa - bb$ |

4.
$$\begin{array}{l} 3a + b \\ 5a - 4b \\ \hline 15aa + 5ab \\ \quad - 12ab - 4bb \\ \hline 15aa - 7ab - 4bb \end{array}$$

5
$$\begin{array}{l} 2a + 3b - 2c \\ 4a + 5b \\ \hline 8aa + 12ab - 8ac \\ \quad + 10ab + 15bb - 10bc \\ \hline 8aa + 22ab + 15bb - 8ac - 10bc. \end{array}$$

6.

6

$$\begin{array}{r} n + 1 \\ n + 1 \\ \hline nn + n \quad\;\; \\ + n + 1 \\ \hline nn + 2n + 1 \end{array}$$

Anmerk. Anstatt aa schreibt man lieber kürzer $a^2$, eben so anstatt aaa schreibt man $a^3$, und diese oben zur Rechten geschriebene Zahlen nennt man Exponenten. Man muß sie aber wohl von den Coefficienten zu unterscheiden wissen, weil sie ganz was anders bedeuten. Um die Operation durch die gewöhnliche Rechenkunst zu erläutern, mag folgendes Exempel dienen, deren ähnliche zur Uebung nützlich aufgegeben werden können.

| Es sey $a = 8$ $b = 2$ | So ist $a - b = 8 - 2$ |
|---|---|
| $a - b$ | $8 - 2$ |
| $a - b$ | $8 - 2$ |
| $aa - ab$ | $64 - 16$ |
| $- ab + bb$ | $- 16 + 4$ |
| $aa - 2ab + bb$ | $64 - 32 + 4 = 36$ |

Anmerk. Man soll a durch b multipliciren. Es sey $a = 8$ Th. $b = 3$, so ist $+ a$ ein Gewinn von 8 Th. $- a$ ein Verlust von 8 Th. Multipliciren durch $+ b$ ist dreymal addiren, multipliciren durch $- b$ ist dreymal subtrahiren.

Also ist I. + a × + b den Gewinn dreymal addiren, welches giebt einen Gewinn von 24 Thalern.

II. + a × − b den Gewinn dreymal subtrahiren, welches giebt einen Verlust von 24 Thalern.

III. − a × + b den Verlust dreymal addiren, welches giebt einen Verlust von 24 Th.

IV. − a × − b den Verlust dreymal subtrahiren, welches einen Gewinn von 24 Thaler giebt. Es geben also einerley Zeichen + verschiedene Zeichen −.

## Das Dividiren.

3. Welche Regeln sind bey der Division zu beobachten?

I. Einerley Zeichen + geben verschiedene −.

II. Die Coefficienten richten sich nach der gewöhnlichen Rechenkunst.

III. Wenn die nämliche Größe zugleich der **Divisor** und **Dividendus** ist, so ist der Quotient = 1.

IV. Wenn

IV. Wenn der nämliche Buchstab den Divisor und Dividendus vermehrt, so wird selbiger im Schreiben ausgelassen.

V. Wenn eine complexe Größe durch eine einfache getheilt wird, so werden alle Glieder von jener durch diese getheilet.

VI. Wenn sich nichts aufheben läßt, so wird der Divisor unter dem Dividendus als ein Bruch hingeschrieben.

## Exempel.

### I. Von incomplexen Größen.

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{ab}{ab} = 1$$

$$\frac{4ab}{2b} = 2a$$

$$\frac{3bc}{4c} = \tfrac{3}{4}b$$

$$\frac{8aad}{-2ad} = -4a$$

$$\frac{-12abc}{4b} = -3ac$$

$$\frac{-6abc}{-3abn} = \frac{2c}{n}$$

## II. Complexe durch einfache.

1. Man soll $2ab - 4bd + b$ theilen durch $b$, so kann man dies also schreiben:

$$\frac{2ab}{b} - \frac{4bd}{b} + \frac{b}{b}$$

und aufgehoben $2a - 4d + 1$ der Quotient.

2. Man soll $abc - abcd - ab$ theilen mit $-ab$

$$\text{Also}\ \frac{abc - abcd - ab}{-ab \quad - \quad ab \quad ab}$$

und aufgehoben $-c + cd + + 1$ der Quot.

3. Man soll $bd + ad + bc$ theilen durch $d$

$$\frac{bd}{d} + \frac{ad}{d} + \frac{bc}{d}$$

Also $b + a + \frac{bc}{d}$ der Quotient.

Anmerk. Wie complexe Größen zu dividiren sind, braucht noch nicht vorgetragen zu werden. Doch ist die Sache keiner besondern Schwierigkeit unterworfen, und richtet sich nach der gewöhnlichen Art zu dividiren in der Rechenkunst; doch mit dem Unterschiede, daß man allezeit nur durch das erste Glied des Divisors theilet. Den Geübtern zu Gefallen will ich ein oder anderes Exempel hinzufügen. Man bemerke nur, daß der Dividendus durch D, der Divisor durch d, der Quotient durch Q angezeigt werde. Die Multiplication des gefundenen Quoti durch den ganzen Divisor soll durch M, die Subtraction dessen aus dem Dividendus durch S, der Rest durch R bemerkt werden.

## Erstes Exempel.

Man soll theilen aa — bb durch a — b.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | d. a — b |
| D. | aa — bb | | Q. a + b |
| M. | aa — ab | | |
| S. | — + | | |
| R. | | ab — bb | |
| M. | | ab — bb | |
| S. | | — + | |
| R. | | 0 0 | |

Zweytes

## Zweytes Exempel.

Man soll aa + 2ab + bb theilen durch a + b

| | |
|---|---|
| | d. a + b |
| D. aa + 2ab + bb | Q a + b |
| M. aa + ab | |
| S. — — | |
| R. ab + bb | |
| M. ab + bb | |
| S. — — | |
| R. o o | |

Die Probe der Multiplication wird durch die Division; die Division durch die Multiplication eben so, wie in der gemeinen Rechenkunst vorgenommen.

---

# Mathematischer Vorübungen dritter Theil.

# Geometrie.

## Erstes Kapitel.

## Verzeichnung und Ausmessung der Linien und Flächen.

### 1. Was ist die Geometrie?

Die Lehre, wodurch ausgedehnte **stätige** Grössen mit einander verglichen und gemessen werden. Stätige Größen (continuæ) sind aber solche, deren Theile alle so zusammenhangen, daß, wo der eine aufhöret, gleich der andere anfängt, und zwischen des einen Ende und des andern Anfang nichts ist, das nicht zu dieser Größe gehöre.

### 2. Wie vielerley ist die Ausdehnung?

Die Größen können ausgedehnt seyn 1) in Ansehung der Länge nach **Linien**; 2) in Ansehung der Länge und Breite nach **Flächen**; 3) in Ansehung der Länge, Breite und Dicke nach **Körpern**.

Anmerk.

Anmerkung. Ein geometrischer Körper ist nach allen Seiten ausgedehnt; die äußersten Gränzen, welche denselben einschließen, sind Flächen, die Gränzen der Flächen sind Linien, die Gränzen der Linien aber Punkte. Folglich sind bey einem geometrischen Körper alle drey angezeigte Ausmessungen, bey einer Fläche aber nur zwey derselben, bey einer Linie nur eine und bey einem Punkte gar keine möglich, d. i. ein geometrischer Körper hat eine Länge, Breite und Dicke (oder Höhe und Tiefe) zugleich; eine Fläche nur eine Länge und Breite; eine Linie nur eine Länge, ein Punkt aber keine von allen dreyen.

3. Wie können die Linien eingetheilet werden?

**In gerade und krumme Linien. Z. E. AB Fig. 1. ist eine gerade, CDE Fig. 2 aber eine krumme Linie.**

Anmerk. Eine gerade Linie ist allemal der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern, und ihre Lage wird durch zween Punkte völlig bestimmt. Eine krumme Linie ist nicht der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern, und in derselben liegen zwischen von einander entfernten Punkten andere, die sich nicht mit ihnen in gerader Linie befinden.

4. Was

4. Was ist eine Zirkellinie, was imgleichen eine Zirkelfläche?

Wenn sich um einen festen Punkt C eine gerade Linie CA Fig. 3. in einer Fläche herumbewegt, so beschreibt der äußere Punkt A die Zirkellinie ABEGD, die man auch den **Umkreis**, oder die **Peripherie** nennet. Der Raum, über welchen CA weggestrichen ist, heißt die **Zirkelfläche** oder **Zirkel**. C heißt der **Mittelpunkt** (Centrum). Des Umkreises jedes Stück BE einen **Bogen**. Die gerade Linie CA oder CB rc vom Mittelpunkte bis zum Umkreise heißt der **Halbmesser** oder **Radius**. Eine gerade Linie BD, welche von einem Punkte der Peripherie B gegen einen überliegenden D durch dem Mittelpunkt C gezogen werden kann, der **Durchmesser** oder **Diameter**. Eine jede gerade Linie EG, welche von einem Punkte der Peripherie gegen einen andern, aber nicht durch den Mittelpunkt gezogen wird, eine **Sehne**.

Anmerk. Die Mathematiker theilen den Umkreis eines jeden Zirkels in 360 gleiche Theile, welche Grade heißen. Der halbe Umkreis hat also 180, der vierte Theil 90, der fünfte Theil 72 Grade. Ein Grad wird abermals getheilt in 60 gleiche Theile, und jeder dieser Theile ist eine **Minute**. Diese Minute wird abermals getheilt in 60 gleiche Theile, und jeder dieser Theile

ist

ist eine Secunde. Z. E. 62°, 14′, 3″ heißt 62 Grade, 14 Minuten, 3 Secunden.

5. Was sind parallele Linien?

Linien, welche, wenn sie auf beyden Seiten verlängert werden, niemals zusammenstoßen, sondern beständig gleich weit von einander entfernet bleiben. Z. E. die Linien AB und CD Fig. 4. sind einander parallel, weil sie nie an einander kommen würden, wenn man sie gleich auch nach der Seite A und C, oder E und D verlängerte.

6. Was ist ein Winkel?

Die Neigung zweyer Linien gegen einander, welche sich in einem Punkte durchschneiden. Z. E. die beyden Linien AC und CB Fig. 5., welche sich in dem Punkte C durchschneiden, schließen einen Winkel ACB ein.

Anmerk. 1. Der Punkt C, darinn beyde Linien einander durchschneiden, heißt die Spitze, oder der Scheitelpunkt des Winkels; die Linien AC und CA selbst aber werden die Schenkel des Winkels genennet.

Anmerk. 2. Bey der Bestimmung der Größe eines Winkels wird durchaus nicht auf die Länge der Schenkel, sondern nur auf ihre Neigung gegen einander gesehen; daher zween Winkel einander

gleich sind, wenn diese Neigung bey dem einen eben so groß ist, als bey dem andern, obgleich die Schenkel des einen Winkels viel grösser sind, als des andern.

7. Wie werden die Winkel eingetheilet?

In rechte, spitzige und stumpfe Winkel. Wenn ein Schenkel BC eines Winkels BCA Fig. 6 und 7 über den Scheitelpunkt C verlängert wird, so entstehen zween **Nebenwinkel** BCA, ACD. Sind diese beyde einander gleich, so wird ein jeder derselben ein rechter genennet Fig. 6. Die Linie AC, welche so auf die andere BD fällt, daß sie die Nebenwinkel BCA, ACD einander gleich macht, heißt eine **senkrechte, lothrechte, perpendiculäre Linie**, oder **Perpendikel**. Ist aber der eine von diesen beyden Winkeln kleiner, als der andere, wie Fig. 7., das ist: neiget sich die Linie AC mehr gegen CD, als gegen BC, so werden beyde schiefe Winkel, und zwar der Winkel ACD, welcher kleiner ist, als ein rechter, ein **spitziger**; der Winkel ACB aber, welcher größer ist, als ein rechter, ein **stumpfer** Winkel genannt.

Anmerk. Wenn beyde Schenkel eines Winkels ACB Fig. 8. über den Scheitelpunkt verlängert werden, so entstehen allemal vier Winkel, davon diejenigen, deren Spitzen gegen einander gekehret sind, als ACB, und DCE; imgleichen ACD und BCE vertical Winkel heissen.

Das Maas eines Winkels ACB Fig. 12. ist ein Bogen EF, welcher aus dem Scheitelpunkt C innerhalb der Schenkel CA, CB beschrieben ist. So viel Grade ein solcher Bogen enthält, so viel Grade eignet man dem Winkel zu. Ein rechter Winkel hat also 90°, ein spitziger unter 90°, ein stumpfer über 90° Grade.

Tab. IV. Fig. *. In dieser Figur ist der Halbzirkel in 36 gleiche Theile getheilt, also ein jeder Theil $\frac{180°}{36} = 5°$. Hätte man z. E. jeden dieser Theile eines größern Halbzirkels in 5 gleiche Theile getheilt, so wäre der Halbzirkel in seine Grade getheilt. Den also getheilten Zirkel nennt man einen Transporteur. Der innere Raum ist weggeschnitten, und die Spitze C ist das Centrum des Zirkels.

Mit Hülfe dieses Werkzeuges kann man 1) den Winkel zeichnen, wenn man weis, wie viel Grad er haben soll. 2) Die Anzahl der Grade bestimmen, oder den Winkel messen, wenn ein Winkel gezeichnet ist.

1. Man soll z. E. einen Winkel von 25° Grad zeichnen. Man ziehe die Linie CA und lege auf C die Spitze des Transporteurs, und dessen Radius Ca längst CA. Man zähle von a bis b

25°, und bemerke den 25sten Grad mit b; hierauf nimmt man das Werkzeug vom Papier weg, und zieht durch C und b die Linie CB, so ist BCA = 25°.

II. Man soll den Winkel BCA messen. Man lege des Werkzeugs Spitze auf C, und Ca längst CA: man bemerke den Punkt b, der auf der Linie CB zu liegen kömmt, und zähle demnächst die Grade, welche zwischen a und b fallen, so ist der Winkel gemessen... Aehnliche Werkzeuge werden auf dem Felde gebraucht.

8. *Wie wird eine gerade Linie gezeichnet?*

1. Eine kleinere wird nach einem Lineal, Fig. 1. vermittelst eines Stiftes, Bleyfeder, Schreibfeder, Reißfeder rc. gezogen.

2. Eine größere wird durch einen ausgespannten Faden, z. E. auf Bauholz, in Gärten rc. oder auf dem Felde durch eingeschlagene Stäbe bestimmet.

Anmerk. Zwischen zween eingesteckten Stäben ist allemal eine gerade Linie; sollen nun mehrere Stäbe zwischen beyde in dieselbe gerade Linie gesteckt, oder dieselbe verlängert werden, so müssen diese letztern Stäbe also gestellet werden, daß, wenn man hinter einem der äußersten Stäbe in einiger Entfernung steht, dieser die übrigen alle decket.

9. Wie

### 9. Wie wird eine Linie senkrecht gegen die andere gezogen?

1. Wenn ein Punkt C, woraus auf AB die perpendiculäre Linie CD gezogen werden soll, in der Linie AB liegt, Fig. 10. α: so verfährt man folgender Maaßen: Man schneide beyderseits von der Linie AB gleiche Theile CM, CN ab. Aus den Punkten M und N beschreibe man zween Zirkelbögen mit der nämlichen Eröffnung des Zirkels, die sich in D schneiden. Durch die Punkte C und D ziehe man CD; es wird CD auf AB senkrecht seyn.

2. Wenn der Punkt D außer der Linie AB liegt, Fig. 10. β: so beschreibe man aus D einen Zirkelbogen MFN, welcher die Linie AB in den Punkten M und N schneidet. Aus M und N beschreibe man über (oder auch unter) den Punkt D zween Bogen, die sich einander schneiden in E, durch E und D ziehe man die Linie EC; sie wird senkrecht seyn auf AB.

Anmerk. Es läßt sich eben dies durch den Winkelhacken bewerkstelligen.

3. Wenn man eine jede Linie MN Fig. 10. β in zween gleiche Theile theilen sollte, so werden aus den Punkten M und N erstlich zwey Bogen durch einen Punkt D, noch-

mals

mals zwey Bogen durch den andern Punkt E, ober, oder unter D, jedes Paar Bogen an D und D mit der nämlichen Oeffnung des Zirkels beschrieben. Wo sich jedes Paar Bogen einander schneidet, zieht man die Linie EC, so ist MN zweyfach getheilet, oder $MC = CN = \frac{MN}{2}$.

4. Wenn man über eine Linie AB Fig. 11. einen halben Zirkel ACB beschreibt, und demnächst aus den beyden Endpunkten des halben Zirkels A und B gegen einen willkührlichen Punkt C an der Peripherie zwo gerade Linien AC und BC ziehet, so ist der Winkel ACB allezeit ein rechter.

10. Wie werden parallele Linien gezogen?

Zu einer gegebenen Linie AB Fig. 9. kann eine andere CD entweder 1) in einer willkührlichen, oder 2) in einer nach einem Maaße (z. B. 2 Fuß) bestimmten Entfernung, oder 3) in einer durch den Punkt N bestimmten Entfernung parallel gezogen werden. Man nimmt in jedem Falle in der Linie AB zween Punkte, E und F nach Belieben an. Aus E und F beschreibt man zwey Bogen M und N mit einer Oeffnung, oder einem Radius des Zirkels, der im 1sten Falle

will-

willkührlich ist, im 2ten Falle gegeben ist, (z. B. 2 Fuß) im 3ten Falle durch eine aus N auf AB gezogene senkrechte Linie bestimmt wird. Ueber diese 2 Bogen wird die Linie CD so gezogen, daß sie dieselben oben berühret. Diese wird mit gegebenen AB gleichlaufend seyn.

11. Wie kann man einen Bogen EF oder Winkel ECF in zween gleiche theilen?

Einen Bogen EF, dessen Mittelpunkt nicht gegeben worden, halbirt man auf eben dieselbe Art, als eine gerade Linie, nämlich durch zwey Paar Bogen. (S. die 9te Frage Nro. 3.) Ist der Mittelpunkt gegeben, so hat man nur ein Paar Bogen zu ziehen. Um einen Winkel ACB Fig. 12. in zwey gleiche Winkel ACD, BCD zu theilen, schneide man von den Schenkeln aus der Spitze C zwey gleiche Stücke CE, CF ab, aus den Punkten E und F beschreibe man mit derselben Oeffnung des Zirkels zwey Bogen, welche sich in D schneiden, und ziehe durch D und den Scheitelpunkt C eine gerade Linie CD: so wird $ACD = DCB = \frac{ACB}{2}$

12. Wie kann zu einer Zirkellinie der Mittelpunkt gefunden werden?

Es werden in dem gegebenen Umkreis des Zirkels ACE Fig. 13. α zwey willkührliche, nicht aber gleichlaufende Linien AC und CE durch zwo senkrechte Linien die erste durch BF, die andere durch DG halbiret. Der Punkt M, darinn diese beyden Linien einander durchschneiden, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Anmerk. Eben so kann zu einem gegebenen Bogen CDEF der Mittelpunkt gefunden, und folglich dieser Bogen ausgezogen, oder ein Stück einer Zirkellinie ergänzet werden.

13. Wie wird eine gerade Linie gemessen?

1. Es wird eine gewisse Länge zum Maaßstabe angenommen, und in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile eingetheilet.

2. Wird durch wiederholte Anlegung des Maaßstabes an die Linie oder Länge, welche gemessen werden soll, gefunden, wie vielmal dieser Maaßstab oder seine Theile in derselben enthalten sind.

Anmerk. 1. Der Maaßstab, womit man die Länge eines Tuches, Landes rc. zu messen pflegt, wird eine Elle genannt, welche man wieder in vier gleiche Theile, oder Viertel theilet. Bey Gebäuden und auf dem Felde bedient man

man sich der Ruthe, welche von den Handwerksleuten in zwölf Werkschuhe oder Füße, und jeder Werkschuh wieder in zwölf Zölle getheilet wird. Zween Werkschuhe machen eine Elle aus; die Feldmesser aber theilen eine Ruthe in zehn Füße oder Schuhe, jeden Schuh in zehn Zölle, jeden Zoll in zehn Linien. Die Landruthen enthalten 15 oder 16 Füße, eine französische Ruthe enthält 6 Pariser Füße.

14. Wie wird eine Zirkellinie gemessen?

Man muß den angegebenen Diameter durch 314 multipliciren, und durch 100 theilen; oder noch genauer, man multipliciret den angegebenen Diameter mit 355, und theilt das Product durch 113. Der Grund dessen wird anderswo vorkommen. Ueberhaupt ist der Umfang des Zirkels dreymal so groß, als der Diameter und etwas drüber. Eine Tresse, die um einen Huth gesetzet, oder ein Stück Eisen, das um ein Rad geschlagen werden soll, muß etwas über dreymal so lang seyn, als der Durchmesser des Huthes oder des Rades.

Soll man aus dem gegebenen Umkreise den Durchmesser finden: so multipliciret man den Umkreis durch 100, und theilt dies Product durch 314. Will man genauer verfahren, so nimmt man 113 statt

100 und 355 statt 314. Der Durchmesser ist also etwas weniger, als ein Drittel des Umkreises.

15. Wie können die Flächen eingetheilet werden?

In ebene und gebogene, oder gekrümmte Flächen.

Anmerk. Eine vollkommen ebene Fläche muß so beschaffen seyn, daß zwischen jeden zween Punkten in derselben eine gerade Linie gezogen werden kann, welche ganz in die Fläche fällt; folglich muß ein Lineal, welches man mit der Schärfe auf dieselbe setzet, allenthalben, wo man es anleget, dichte an eine solche Fläche anschliessen.

16. Was wird durch den Umfang oder Perimeter einer Fläche, durch eine Figur und durch die Seiten und Ecken derselben verstanden?

Eine Fläche, welche mit Linien umschlossen oder begränzt ist, wird eine Figur genannt. Die Linien, welche eine Fläche einschliessen, zusammen genommen, heissen der Umfang, oder Perimeter; die einzelne Linien einer Figur die Seiten, und die von den Seiten eingeschlossenen Winkel die Ecken der Figur.

Anmerk. Eine von den Seiten einiger Figuren wird in Ansehung der Lage gegen den übrigen Seiten, die Grundlinie

linie oder Basis der Figur genannt; die Höhe derselbigen aber wird durch eine gerade Linie bestimmet, welche von der obersten Ecke derselben senkrecht gegen die Grundlinie oder den verlängerten Theil derselben ist gezogen worden. Z. E. wenn in den Figuren 26. und 27. AB zur Grundlinie ist angenommen worden, so ist CP die Höhe derselben.

17. Wie können die Figuren eingetheilet werden?

1. In Ansehung der Beschaffenheit ihrer Seiten in geradlinigte und krummlinigte Figuren. Die Seiten der erstern bestehen aus geraden, diejenigen der andern aus krummen Linien.

2. In Ansehung der Größe ihrer Seiten oder Winkel in reguläre und irreguläre Figuren. Die erstern haben lauter gleiche, die andern ungleiche Seiten und Winkel.

3. In Ansehung der Menge ihrer Seiten oder Winkel in Dreyecke oder Triangel, Vierecke und Vielecke, oder Polygone. Die ersten haben drey, die andern vier, die dritten mehr, als vier Seiten und Winkel.

18. Wie

18. Wie können die Dreyecke oder Triangel wieder eingetheilet werden?

1. In Ansehung der Seiten

a) in gleichseitige, welche drey gleiche Seiten und Winkel haben, und regulär sind, wie Fig. 13.

b) In gleichschenklichte, welche zwey gleiche Seiten und Winkel haben, wie Fig. 14.

c) In ungleichseitige, welche drey ungleiche Seiten und Winkel haben, wie Fig. 15.

2. In Ansehung der Winkel

a) in rechtwinklichte, welche einen rechten Winkel haben, wie Fig. 16.

b) In stumpfwinklichte, welche einen stumpfen Winkel haben, wie Fig. 17.

c) In spitzwinklichte, welche lauter spitzige Winkel haben, wie Fig. 13.

19. Wie können die Vierecke weiter eingetheilet werden?

1. In Ansehung der Seiten

a) in gleichseitige, welche vier gleiche Seiten haben, wie Fig. 18. und 20.

b) In ungleichseitige, welche ungleiche Seiten haben, wie Fig. 19, 21, und 22.

2. In Ansehung der Winkel

a) in rechtwinklichte, welche vier rechte Winkel haben, dazu gehöret:

aa) Das Quadrat, welches vier rechte Winkel und zugleich vier gleiche Seiten hat, wie Fig. 18.

bb) Das länglichte Viereck, oder Rectangulum, in welchem vier rechte Winkel, aber nur jede zwey einander gegenüber liegende Seiten einander gleich sind, wie Fig. 19.

b) In schiefwinklichte, welche schiefe Winkel haben, dazu gehöret:

aa) Die Raute, welche vier schiefe Winkel, aber vier gleiche Seiten hat, wie Fig. 20.

bb) Die längligte Raute, in welcher vier schiefe Winkel, aber nur jede zwey einander gegenüber liegende Seiten einander gleich sind, wie Fig. 21.

cc) Das Trapezium, welches eine vierseitige Figur, aber von den vier eben ernennten verschieden ist, wie Fig. 22.

20. Wie können die Vielecke oder Polygonen weiter eingetheilet werden?

Es werden dieselben nach der Anzahl ihrer Seiten und Winkel in Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke rc. eingetheilet. Z. E. Fig. 23. ist ein Sechseck.

21. Wie können die Triangel aus gegebenen Linien gezeichnet werden?

Wenn ein Dreyeck gezeichnet werden soll, so müssen so viel Stücke gegeben seyn, als zur völligen Bestimmung dessen erfordert werden. Ein Dreyeck ist völlig bestimmt, wenn entweder 1) drey Linien, oder 2) zwey Linien, und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder 3) eine Linie und zwey an selbiger liegende, oder ein ihr anliegender, und der andere ihr entgegen gesetzter Winkel gegeben sind. Hieraus folgen verschiedene Auflösungen.

1) Ein gleichseitiges Dreyeck, wie Fig. 13. wird aus einer gegebenen Linie AB also gezeichnet: Es wird die gegebene Linie AB zwischen den Spitzen eines Zirkels gefasset, und

mit

mit demselben aus dem einen Endpunkte dieser Linie B ein Bogen, aus dem andern A aber ein anderer Bogen beschrieben. Hierauf werden aus eben diesen Endpunkten gegen den Durchschnittspunkt dieser Bogen C die Linien BC und AC gezogen.

2) Ein gleichschenklichtes Dreyeck, wie Fig. 14., wird aus zwey gegebenen Linien AB und AC also gezeichnet: Es werden aus den Endpunkten der einen Linie AB mit der andern zu den Schenkeln gegebenen Linie AC Bögen beschrieben, und hierauf gegen den Durchschnittspunkt C dieser Bögen die Linien AC, BC gezogen.

3) Ein ungleichseitiges Dreyeck, wie Fig. 15., wird aus drey gegebenen Linien AB, BC und AC also gezeichnet: Es wird aus dem einen Endpunkte B der einen gegebenen Linie AB mit der andern Linie BC ein Bogen, ferner aus dem andern Endpunkte A mit der dritten Linie AC ein anderer Bogen beschrieben; hierauf werden aus diesen Endpunkten gegen den Durchschnittspunkt dieser Bögen C die Linien AC und CB gezogen.

4) Wenn Fig. 15. CA, AB und der eingeschlossene Winkel CAB gegeben sind, so setzt man an AB die Linie AC unter den gegebenen

gebenen Winkel und ziehet CB. Sind neben der Seiten CB die anliegenden Winkel CAB, CBA gegeben: so bringet man an AB unter den gegebenen Winkeln zwey Linien AC, BC, die sich in C begegnen werden. Wenn die Seite AB, der anliegende Winkel CAB, und der entgegen gesetzte ACB gegeben wären, so wäre erstlich der Winkel CBA auf folgende Weise zu finden: Mit einem willkührlichen Radius beschreibe man einen Zirkel, und verlängere den Radius bis zur Peripherie, so hat man einen Halbzirkel; mit der nämlichen Eröffnung schneide man zwischen den Schenkeln der gegebenen Winkel zwey Bogen ab, und trage sie auf dem Halbzirkel, so wird das übrige Stück des Halbzirkels der Winkel CBA, und alsdann verfahre man so, wie eben gesagt worden. Wären endlich, neben der Linie AB, der eine anliegende Winkel CAB gegeben, und der zweyte Winkel, es wäre aber willkührlich, ihn an der gegebenen Seite, oder dieser Seite gegenüber anzubringen: so wäre das Dreyeck nicht bestimmet; denn auf diese Art können zwey verschiedene Dreyecke entstehen.

Anmerk. Unter drey gegebenen Linien, aus welchen ein Triangel gezeichnet werden soll, müssen jede zwey zusammen genommen, allemal nothwendig grösser seyn, als die dritte. Z. E. die beyden Sparren eines Daches müssen zusammen

sammen genommen, nothwendig län-
ger seyn, als der Balken, auf welchen
sie gesetzet werden sollen.

22. Wie können die Vierecke aus gegebenen Linien gezeichnet werden?

1) Ein Quadrat, wie Fig. 18., oder Raute, wie Fig. 20., wird aus einer gegebenen Linie BC also gezeichnet: Es wird an die gegebene Linie BC eine andere Linie BA senkrecht, wie Fig. 18., oder unter einem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 20., gesetzet, und diese der BC gleich gemachet. Hierauf wird eben diese gegebene Linie BC zwischen die Spitzen eines Zirkels gefasset, und mit demselben aus den Punkten A und C Bögen beschrieben. Endlich werden aus den Punkten A und C gegen den Durchschnittspunkt dieser Bögen D die Linien AD und CD gezogen.

2) Ein jedes anders **Parallelogramm**, d. i. eine Figur, deren zwo gegenüber stehende Seiten parallel sind, wie Fig. 20., wird aus zwey gegebenen Linien BC und BA also gezeichnet: Es wird die eine Linie AB senkrecht, wie Fig. 19, oder unter einem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 21., an die andere Linie BC gesetzet. Hierauf wird mit der Linie BC aus A ein Bogen, ferner mit der Linie AB aus C ein anderer Bogen beschrieben.

schrieben. Endlich werden aus den Punkten A und C gegen den Durchschnittspunkt dieser Bögen D die Linien AD und CD gezogen.

3) Ein **Trapezium**, wie Fig. 22., wird aus vier gegebenen Linien AB, AD, BC, CD also gezeichnet: Es wird die Linie AB unter dem gegebenen Winkel an die Linie BC gesetzet. Hierauf wird aus A mit der Linie AD ein Bogen, und aus C mit der Linie CD ein anderer Bogen beschrieben. Endlich werden aus den Punkten A und C gegen den Durchschnittspunkt dieser Bögen die Linien AD und CD gezogen.

23. Wie können reguläre Vielecke aus einer gegebenen Linie AG Fig. 23. beschrieben werden, wenn man den Transporteur hierzu gebrauchen will?

Man theile 360 durch die Anzahl der Seiten (z. E. 5), die das Vieleck haben soll.

$$\left(\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ\right)$$

Diesen Quotienten ziehe von 180° ab, (180° — 72° = 108°) und halbire diesen Rest (54°), so giebt dies die Grade, unter denen man an die Endpunkte der gegebenen Linie AG zwey Linien AC, GC ansetzen muß. Ihr

Ihr Durchschnittspunkt ist das Centrum C, woraus man mit CA oder CG einen Zirkel beschreibt. Im Umkreise dieses Zirkels wird sich die gegebene Linie AG so vielmal herumtragen lassen, als Seiten das Vieleck haben soll. Ein Sechs- oder Zwölfeck läßt sich leichter und ohne Transporteur beschreiben. Denn mit der gegebenen Linie AB wird nur ein Zirkel beschrieben, und AB sechsmal im Umkreise herum getragen. Wird der Bogen AB halbirt, und an diese Halbscheid eine Sehne angebracht, so hat man die Seite des Zwölfeckes.

24. Wie wird eine Fläche gemessen?

1) Ueberhaupt wird eine Quadratfläche von bestimmter Größe, welche wieder in kleinere gleiche Quadratflächen eingetheilet wird, zum Maaßstabe angenommen, und alsdann gefunden, wie vielmal diese Fläche oder deren Theile in der Fläche, welche gemessen werden soll, enthalten sey.

Anmerkung. Um diese Ausmessung der Flächen oder Figuren der oben angezeigten Ausmessung gerader Linien gleichförmig zu machen, bedient man sich der Quadratruthe, oder eines Quadrates, welches eine Ruthe lang und breit ist. Diese Quadratruthe enthält 100 Quadratfüße, oder kleinere Quadrate, deren jedes einen Fuß lang und breit ist. Der Quadratfuß enthält

wieder 100 Quadratzölle, oder kleinere Quadrate, deren jedes einen Zoll lang und breit ist. Ein Stück Landes, welches 180 rheinländische Quadratruthen enthält, wird ein Morgen genannt; ein Hufe aber heißt ein Stück Landes von 30 Morgen.

2) Insonderheit kann der Quadratinhalt einer Fläche auf folgende Weise aus bloßem Längenmaaße derselben berechnet werden:

a) Wenn die gegebene Fläche ein Triangel ist, so wird die Grundlinie und Höhe derselben gemessen, und hierauf entweder 1) die halbe Höhe mit der Grundlinie oder 2) die halbe Grundlinie mit der Höhe, oder 3) die Höhe mit der Grundlinie vermehret, und in dem letzten Falle das Product mit 2 zertheilet. Die Producte in den beyden ersten Fällen, und der Quotient in dem letztern giebt den Flächeninhalt des ganzen Triangels im Quadratmaaße. Z. E. es sey in dem Triangel ABC Fig. 26. die Grundlinie AB 4° 2′ 6″; die Höhe desselben CP aber 2° 5′ 4″: so ist der Flächeninhalt des ganzen Triangels 5 Quadratruthen, 41 Quadratfuß und 2 Quadratzoll, welches also geschrieben wird: 5°, 41′, 02″ □ Maaß. Die Rechnungen selbst nach

nach den drey angezeigten Methoden sind folgende:

| | |
|---|---|
| $AB = 4^{\circ}2'6''$ | $\frac{1}{2}AB = 2^{\circ}1'3''$ |
| $\frac{1}{2}CP = 127$ | $CP = 254$ |
| 2982 | 852 |
| 852 | 1065 |
| 426 | 426 |
| $ABC\ 5^{\circ}, 41', 02''$ | $5^{\circ}, 41', 02''$ |

$BC = 4^{\circ}2'6''$
$CP = 254$

1704
2130
852

2 108204'' dieses halbiret

$5^{\circ}, 41', 02''$.

Anmerk. Es erhellet aus diesen Exempeln, daß in dem Producte für die Quadratzölle und Quadratfüße allezeit zween Ziffern genommen werden müssen. Wenn Schuhe, Zolle, oder Linien in dem Maaße der Grundlinie vorkommen, und nicht in dem Maaße der Höhe, oder auch umgekehrt: so muß man bey dem Maaße der Höhe die Stellen der Schuhe, Zolle oder Linien mit Nullen ausfüllen. Z. E. Es sey die Grundlinie AB 4° und 6'', die halbe Höhe

CP aber 1° 2′, so würde die Rechnung diese seyn:

$$\begin{array}{r} 4^{\circ}0'6'' \\ 1^{\circ}2'0'' \\ \hline 8120 \\ 406\phantom{0} \\ \hline 4^{\circ},87',20''. \end{array}$$

b) Wenn die gegebene Fläche ein **Parallelogramm** ist, wie Fig. 25, so wird die Grundlinie BC im Längenmaaße mit der Höhe DP im Längenmaaße vermehret. Das Product giebt den Flächeninhalt des Parallelogramms im Quadratmaaße. Z. E. es sey

BC 5°, 7′, 3″, DP 13°, 4′

$$\begin{array}{r} BC = 5^{\circ},7',3'' \\ DP = 13^{\circ},4',0'' \\ \hline 229\ \ 2\ 0 \\ 1719\phantom{\ \ 20} \\ 573\phantom{0\ \ 20} \\ \hline BCDA = 76^{\circ},78'\,20''\ \square\ \text{Maaß}. \end{array}$$

c) Wenn die gegebene Fläche ein Trapezium oder Vieleck ist, wie Fig. 28., so wird dieselbe in Triangel eingetheilet,

hierauf

hierauf eines jeden Triangels Flächeninhalt auf die vorhin angezeigte Weise gefunden, und aller dieser Triangel gefundener Flächeninhalt in eine Summe gebracht. Diese giebt der ganzen Fläche Inhalt im Quadratmaaße.

d) Wenn die gegebene Fläche ein **Zirkel** ist, wie Fig. 29.: so wird aus dem gegebenen Durchmesser desselben im Längenmaaße (nach Frage 14) gefundene Peripherie desselben mit dem vierten Theile des Durchmessers, oder halben Radius vermehret. Das Product gibt den Flächeninhalt des Zirkels.

Anmerk. Die Größe des Flächeninhaltes einer Figur muß allemal von der Größe des Umfanges, oder Perimeters derselben wohl unterschieden werden: denn es kann eine Figur einen viel grössern Perimeter haben, als eine andere, und doch in Ansehung ihres Flächeninhaltes kleiner seyn. Ein Zirkel ist die geraumigste Figur; ein reguläres Vieleck, dessen Perimeter so groß ist, als die Peripherie eines Zirkels, ist kleiner als der Zirkel; ein irreguläres von eben so vielen Seiten noch kleiner; ein Quadrat ist kleiner als ein reguläres Vieleck von gleichem Perimeter; ein irreguläres Viereck noch kleiner;

kleiner; ein gleichseitiger Triangel ist kleiner als ein Quadrat von gleichem Perimeter, und ein ungleichseitiger Triangel noch kleiner. Z. E. eine runde Kirche, welche 400 Fuß im Umfange hat, kann mehr Leute in sich fassen, als eine viereckigte, deren jede Seite 100 Fuß lang ist. In einem viereckigten Garten können mehr Bäume stehen, als in einem dreyeckigten, dessen Zaun eben so groß ist.

---

# Mathematischer Vorübungen dritten Theils

## Zweytes Kapitel.

## Ausmessung der Distanzen und Höhen, Grundrisse, Berechnung der Körper.

1. Wie wird ein Maaßstab verfertiget, auf welchem sich Ruthen, Fuß und Zolle bequem abnehmen lassen? Man nennt ihn den verjüngten Maaßstab. Tab. IV. Fig. **

### I.

Man theilet eine gegebene gerade Linie AK, die eine Ruthe hier heißt, in 10 gleiche Theile folgender Maaßen. Man nehme eine andere unbestimmte Linie AL, die grösser ist als AK, und schneide von selbiger 10 gleiche Theile ab. AP enthalte in sich diese 10 Theile. An K bringe man unter einem beliebigem Winkel eine unbestimmte Linie KR an, demnächst trägt man aus A mit der Eröffnung AP diese Linie auf KR, und bemerke den Punkt

Punkt S, wo sie der Linie KR begegnet. Wenn man nun aus den Theilungspunkten von AS zu SK Parallelen ziehet: so wird AK in 10 gleiche Theile getheilet seyn, und der zehnte Theil dieser Linie wäre also ein Fuß.

II. Fig. *** Die zehn gleiche Theile von AK sind Aa, ab, bc, cd 2c; auf ihr richte man einen Perpendikel AL auf, welches man aus eben den vorigen, oder auch aus zehn andern unter sich gleichen Theilen zusammensetze; durch die Theilungspunkte von AL ziehe man mit Ak parallele Linien, die Querlinien heissen sollen: auch ziehe man aL, und mit dieser parallele Linien b9, c8, d7, e6 2c., die schiefe Linien heissen sollen, und deren letzte k1 ist. Man mache endlich LM=Ak und ziehe kM, so kann man innerhalb des Rechteckes ALMk alle Füße und Zehntheile eines Fußes, oder Zolle finden, die zusammen weniger als eine Ruthe betragen.

Denn das Dreyeck ALa giebt die Zolle durch die Stücke der Querlinien, die zwischen K und La, I und La, H und La 2c. fallen, als welche Stücke 1, 2, 3 2c. Zolle sind. Eben so enthält das Dreyeck k1M auf der Querlinien Stücken, welche zwischen k1 und kM abgeschnitten werden, die Zolle von k nach M hinaufwärts. Jedes Paar schiefe Linien

aber

aber schneidet zwischen sich von allen Querlinien gleich große Stücke oder Fuß ab.

Will man also z. E. 7′8″ nehmen, so fasse man anfangs mit dem Zirkel die Länge ab=7. Man wird eben diese Weite zwischen den beyden Durchschnittspunkten jeder Querlinien mit aL und h3 haben. Man gehe also in die Querlinie, wo eines von beyden vorerwähnten Dreyecken 8″ giebt. Im Dreyecke ALa giebt solches die Querlinie durch C. Nachdem man also die beyden Zirkelspitzen vorerwähnter Maaßen über die Durchschnitte dieser Querlinie mit aL, h3 gebracht hat: so lasse man die Spitze über den letzten Durchschnitt unverrückt stehen, öffne aber den Zirkel, bis die andere Spitze über C kommt, so ist das Stück der Querlinie zwischen C und dem Durchschnitte mit h3 so groß als 7′, 8″. Wollte man die Zoll im Dreyecke k1M nehmen: so müßte man in die Querlinie durch I gehen, und die beyden Zirkelspitzen, deren Weite ab, oder 7 Fuß, über dieser Querlinie Durchschnitte mit c8 und k1 bringen, alsdann die Spitze über dem Durchschnitt mit c8 stehen lassen, die andere aber über dem Durchschnitt mit kM bringen.

Will

Will man nun auch ganze Ruthen nebst Fuß und Zoll nehmen: so darf man nur die Länge Ak rechts von k nach p, wie hier geschehen, oder auch auf den jenseits zu verlängernden links von A tragen, und durch die Punkte, die sich solchergestalt geben, Perpendikel ziehen. Es sey z. E. kp=Ak=MP. und man wollte 1°, 9'6'' nehmen: so fasse man erst mit dem Zirkel pa=1°, 9'. Wenn man nun mit der nämlichen Oeffnung des Zirkels die eine Spitze nach pP hinauf führt, so bleibt die andere Spitze nicht in aL, sondern beschreibt einen Perpendikel durch a auf Ak. Man gehe mit dem Zirkel solchergestalt bis dahin, wo das Dreyeck k1M6'' angiebt. Das geschieht da, wo es zwischen seinen Seiten k1, kM ein Stück der Querlinie durch G enthält. Man hat also die verlangte Weite, wenn man die beyden Zirkelspitzen über die Durchschnitte der Querlinie durch G mit pP und mit aL bringet. Denn vom Durchschnitte mit Pp bis an den Durchschnitt mit km ist 1°, vom Durchschnitt mit k1 bis an den mit aL sind 9', und von dem Durchschnitte mit k1 bis an den Durchschnitt mit kM 6''. Die Zolle fallen hier zwischen die Ruthen und Fuße.

Fig. **** Man lasse nun die Zahlen von M bis L, wie sie verzeichnet sind, stehen; statt

statt KIHG kommen 1, 2, 3, 4, 2c. So drücken diese Zahlen die Zolle aus, die das Dreyeck ALa nach der Ordnung angiebt, und anstatt abc 2c. schreibt man 1, 2, 3.

Anmerk. 1. Wenn AK nach der Gegend k noch neunmal getragen, so ist die gerade Länge 10 AK oder 10 Ruthen, und also kann man auf solcher die Ruthen, Füsse und Zolle abnehmen, welcher Gebrauch des verjüngten Maaßstabes häufig vorkommt.

Anmerk. 2. Wenn aber AK 10 Ruthen sind, so ist Aa eine Ruthe, und was zuvor ein Zoll war, wird ein Fuß, die Zolle werden aber wegfallen.

2. Durch welche Linien werden die Distanzen bestimmet?

Die Distanz oder Entfernung zweyer Punkte, oder zweyer Körper, die man wie zwey Punkte betrachtet, wird durch eine gerade Linie zwischen beyden bestimmt; die Entfernung zweyer gleichlaufenden Linien durch eine senkrechte Linie zwischen beyden. Sind aber zwey Linien nicht gleichlaufend, wie Fig. 35. EB und DC: so nimmt man, wenn sie über einander gezogen sind, in der einen DC einen Punkt C an, und bestimmt dessen Abstand von EB durch die senkrechte Linie CL.

Wenn

Wenn sie aber neben einander gezogen sind, wie AB und DC, so kann bloß die Entfernung zweyer Punkte in denselben, wie B, C oder B, D durch eine gerade Linie, wie CB angegeben werden. Diese Linie, welche die gesuchte Entfernung bestimmt, findet man, wenn man sie zur Seite eines Dreyecks macht, und in demselben so viel Seiten mißt, als nöthig sind, um das ganze Dreyeck zu bestimmen, und folglich auch diese Seite zu finden. Siehe Nro. 22. der Geom.

3. Wie kann die Weite zweyer Orte gemessen werden, zu welchem man entweder gar nicht, oder nicht gerade von einem zum andern kommen kann?

a) Wenn man zwar zu beyden Orten, aber nicht gerade zu von dem einen zu dem andern kommen kann, z. E. wenn die Weite des Hauses A Fig. 30. von dem Baume B, zwischen welchen ein Teich oder Morast lieget, gemessen werden soll, so wird 1) ein willkührlicher Punkt C, aus welchem man nach A und B kommen kann, angenommen, und die Weite desselben sowohl von A als von B gemessen. 2) Wird der Winkel ACB gemessen. 3) Werden auf dem Papiere zwo Linien gezogen, welche einen Winkel einschliessen, der dem gemessenen gleich ist; beyde Linien aber werden nach dem verjüngten Maaßstabe

stabe so lang gemacht, als die gemessenen im großen sind. Die Entfernung der beyden Endpunkte dieser Linien, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Weite des Hauses von dem Baume im großen Maaße.

b) Wenn man nur zu einem von den beyden Oertern kommen kann, z. E. wenn die Entfernung des Hauses A Fig. 31. von einem Thurme B, der jenseit eines Flusses steht, gemessen werden soll: so wird 1) ein willkührlicher Punkt C, aus welchem man nach A kommen kann, angenommen, und die Linie AC gemessen; 2) wird sowohl der Winkel BAC, als ACB gemessen; 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die Linie AC im großen Maaße; an die beyden Endpunkte dieser Linie aber werden zwey andere Linien unter Winkeln, die den gemessenen gleich sind, gehörig angesetzet: die Entfernung des Endpunktes A in der verjüngten Linie von dem Punkte, in welchem sich die beyden andern Linien durchschneiden, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Weite des Hauses von dem Thurme im großen Maaße.

c) Wenn man zu keinem von beyden Oertern kommen kann, z. E. wenn die Weite

zweener

zweener Thürme einer Stadt, in welche man nicht kommen kann, A und B Fig. 32. gemessen werden soll, so werden 1) zween willkührliche Punkte C und D auf dem Felde vor der Stadt angenommen, und die Weite derselben, oder die Linie CD gemessen; 2) werden in C die Winkel ACB und BCD, ferner in D die Winkel CDA und ADB gemessen; 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so lang ist, als die Linie CD: an derselben jeden Endpunkt werden zwo Linien unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzet. Die Entfernung der beyden Punkte, in welchen sich die Linien einander durchschneiden, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Entfernung der beyden Thürme in der Stadt in großem Maaße.

4. Wie kann die Höhe eines Berges, Thurmes, Hauses ꝛc. gemessen werden?

a) Wenn man zu dem Punkte, welcher unter der Spitze des Thurmes, Baumes ꝛc., dessen Höhe gesucht wird, senkrecht liegt, kommen, und ihn bestimmen kann, z. E. wenn die Höhe des Thurmes AB Fig. 33. gemessen werden soll, so kann solches auf folgende Arten geschehen:

aa) Ver-

aa) Vermittelst eines Winkelmessers. Es wird 1) in einiger Entfernung vom Thurme ein Punkt C angenommen, und über denselben der Winkelmesser so gestellet, daß die unbewegliche Diopter horizontal stehe, die bewegliche aber gegen A gerichtet sey, wodurch also die Größe des Winkels ACB gefunden wird; 2) wird die Entfernung dieses Punktes vom Thurme, oder die Linie DE und die Höhe des Statives des Winkelmessers EC gemessen; 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die Linie DE; an dem einen Punkte dieser Linie wird eine andere Linie unter dem gemessenen Winkel angesetzet, an dem andern aber eine senkrechte Linie errichtet, welche die an dem ersten Endpunkte angelegte Linie durchschneidet. Die Länge dieser senkrechten Linie, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Höhe des Thurmes, wenn dazu noch die Höhe des Statives des Winkelmessers ist hinzugesetzet worden.

bb) Vermittelst zweener Stäbe von verschiedener Länge. Es wird 1) in einiger Enfernung von dem Thurme ein langer Stab senkrecht gestellet; 2) wird ein kleinerer

nerer Stab senkrecht und so eingerichtet, daß, wenn man das Auge an des kleinern Stabes Spitze hält, die Spitze des längern Stabes die Spitze des Thurmes bedecket; 3) wird die Höhe beyder Stäbe, ihre Entfernung von einander, und die Entfernung des kleinern Stabes von dem Thurme gemessen; 4) wird folgende Proportion gemacht: wie die Entfernung beyder Stäbe von einander, zu dem Unterschiede ihrer Höhe, also die Entfernung des kleinern Stabes von dem Thurme zu der gesuchten Höhe des Thurmes. Zu dem vierten Proportional-Terminus wird die Höhe des kleinern Stabes addirt. Z. E. es sey die Höhe des kleinern Stabes 4′, des größern 10′, folglich ihr Unterschied 6, die Entfernung beyder Stäbe von einander 5′, und die Entfernung des kleinern Stabes von dem Thurme 6° 5′.

5′ : 6′ = 6 5′ :

| | |
|---|---|
| 6′ | 5 |
| 39, 0′ | 7° 8′ |
| 35 | 4′ Höhe des Stabes. |
| 40 | 8° 2′ Höhe des Thurmes. |
| 40 | |
| 0 | |

6c) Ver-

cc) Vermittelst des Schattens. Es wird 1) die Länge des Schattens, welchen der Thurm auf einem freyen ebenen Platze wirft, und zu eben der Zeit die Länge des Schattens, welchen ein senkrechter Stab wirft, nebst der Höhe des Stabes gemessen; 2) wird geschlossen, wie die Länge des Schattens vom Stabe zu seiner Höhe, also die Länge des Schattens vom Thurme zu der gesuchten Höhe des Thurmes.

b) Wenn man den Punkt, welcher unter der Spitze des Thurmes senkrecht liegt, nicht bestimmen kann, wie Fig. 34: so werden 1) in einiger Entfernung von dem Punkte B zween Punkte E und F, welche mit demselben in gerader Linie liegen, gewählet, und die Entfernung derselben von einander, oder die Linie EF gemessen; 2) wird in dem Punkte C der Winkelmesser so gestellet, daß die unbewegliche Diopter horizontal, die andere aber gegen A gerichtet sey, wodurch also der Winkel ACL gemessen wird; 3) wird der Winkelmesser eben so in den Punkt D gestellet, und der Winkel ADL gemessen; 4) wird auf dem Papiere eine gerade Linie gezogen, und auf dieselbe aus dem einen Punkte die Länge der Linie CD oder EF nach dem verjüngten Maaßstabe getragen; ferner werden an den beyden Endpunkten dieser

Länge zwey Linien unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzet, und endlich aus dem Punkte, darinn sich diese beyden Linien durchschneiden, gegen den verlängerten Theil der ersten Linie eine senkrechte Linie gezogen. Die Länge dieser senkrechten Linie, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Höhe des Thurmes in großem Maaße, wozu die Höhe des Statives noch addiret wird.

Anmerk. Auf eine ähnliche Weise kann die Tiefe eines Brunnens, eines Thalers rc. gemessen werden.

5. Wie kann ein Feld, Garten, Teich, oder ganze Landschaft ausgemessen, in einen Grundriß gebracht, und der Flächeninhalt davon berechnet werden?

1) Es werden alle Seiten des Feldes mit einer Meßschnur, oder Meßkette, oder Maaßstabe, und alle Winkel, welche dieselben mit einander machen, mit einem Winkelmesser gemessen und ordentlich aufgeschrieben.

2) Wird vermittelst eines Transporteurs die Größe des Winkels, welchen die eine an der ersten liegende Seite mit der ersten auf dem Felde einschließt, an diese erste Seite auf dem Papiere gesetzet, und diese zweyte Linie nach dem verjüngten Maaßstabe so lang gemachet,

chet, als die zweyte auf dem Felde gemessene Seite der Fläche im großen Maaße.

3) Wird auf eben diese Weise die dritte und vierte Seite der gemessenen Fläche nach dem verjüngten Maaßstabe und unter den gehörigen Winkeln auf das Papier getragen, bis man endlich, wenn alle Seiten bis auf zweye, und alle Winkel bis auf einen sind aufgetragen worden, eine kleine Figur erhält, welche dem gemessenen Felde ähnlich seyn muß, und den Grundriß dieses Feldes giebt, in welchem man hernach alle merkwürdige Umstände des Feldes, z. E. Gränzsteine, Wege, Flüsse zeichnen kann.

4) Wird dieser Grundriß in Triangel eingetheilet, in jedem Triangel aber eine Linie zur Grundlinie angenommen, und diese, nebst der Höhe nach demselben verjüngten Maaßstabe, nach welchem der Grundriß ist gezeichnet worden, genau gemessen.

5) Wird der Flächeninhalt eines jeden Triangels, darinn der Grundriß ist eingetheilet worden, und ferner der Flächeninhalt des ganzen Grundrisses nach Fig. 35. in verjüngtem Quadratmaaße berechnet, welches zugleich den Flächeninhalt des ganzen Feldes im großen Quadratmaaße giebt.

3.

Z. E. es sey ein Feld ausgemessen worden, welches sieben Seiten hat. Die erste enthalte 8° 5′, die zweyte 5° 2′, die dritte 4° 7′ 9″, die vierte 5° 9′ 2″, die fünfte 5° 8′ 9″, die sechste 6° 7′ 2″, die siebente 3° 5′. Der Winkel zwischen der ersten und zweyten Seite sey 129°, 45′, zwischen der zweyten und dritten 139°, 15′, zwischen der dritten und vierten 109°, zwischen der vierten und fünften 150°, zwischen der fünften und sechsten 120°, 30′, zwischen der sechsten und siebenten 131°, zwischen der siebenten und ersten 120° 30′.

Nun sey AB Fig. 35. nach dem verjüngten Maaßstabe so groß gemacht, als die erste Seite des Feldes, folglich 8° 5′; an AB sey der Winkel ABC von 129°, 45′ gesetzet, und BC im verjüngten Maaße so groß, als die zweyte Seite, folglich 5° 2′, an BC sey der Winkel BCD von 139°, 15′ gesetzet, und CD so groß als die dritte Seite rc.: so wird die Figur ABCDEFG den Grundriß des ausgemessenen Feldes geben. Dieser Grundriß wird durch die Linien GB, FB, EB, EC in fünf Triangel getheilet, so findet man nach dem verjüngten Maaßstabe, daß die Grundlinie GB in dem ersten Triangel GAB 10° 7′ 1″, die Höhe desselben, AH aber 2° 4′ betrage. In dem zweyten Triangel GBF ist die Grundlinie FB 12° 4′ 3″, die Höhe GI 5° 7′ 9″; in dem

dritten

dritten Triangel FBE ist die Grundlinie FB die vorige, die Höhe EK aber 5°1′6″; in dem vierten Triangel EBC ist die Grundlinie EB 10°8′8″; die Höhe CL 4°1′2″; in dem fünften Triangel ECD ist die Grundlinie EC 8°7′4″, die Höhe DR aber 3°0′6″. Die Berechnung des Flächeninhaltes dieser fünf Triangel ist folgende:

GB = 10°7′1″<br>
½AH = 1°2′0″<br>
21420<br>
1071<br>
△GAB = 12°85′20″<br>
FB = 12°43″<br>
½EK = 258<br>
9944<br>
6215<br>
2486<br>
△FBE = 32°06′94″<br>
EC = 8°7′4″<br>
½DR = 153<br>
2622<br>
4370<br>
874<br>
△ECD = 13°37′22′

FB = 12°4′3″<br>
GI = 579<br>
11187<br>
8701<br>
6215<br>
2) 719697<br>
△GBF = 35°98′48½″<br>
EB = 10°8′8″<br>
½CL = 206<br>
6528<br>
2276<br>
△EBC 22°41′28″<br>
1) GAB = 12°85′20″<br>
2) GBF = 359848½<br>
3) FBE = 320694<br>
4) EBC = 224128<br>
5) ECD = 133722

Die Summe aller Triangel<br>
im □ Maaße ist = 116°,96′,12½″

Dieses ist also auch der Flächeninhalt des ganzen Feldes.

Anmerk. 1. Es wäre nicht nöthig gewesen, die beyden letztern Seiten FG und GA, nebst dem Winkel FGA, welchen sie einschließen, oder die letzte Seite GA, nebst den beyden Winkeln FGA und GAB, welche an dieser Seite liegen, zu messen, weil sich diese Stücke in dem Risse von selbst geben; indessen dienet die würkliche Ausmessung dieser Stücke dazu, daß man dadurch von der Richtigkeit der ganzen Ausmessung versichert werde.

Anmerk. 2. Wenn die Seiten des Feldes über Anhöhen und Berge gehen, so muß nicht die über einen Berg gemessene Länge der Seite in den Grundriß gebracht werden, weil sonst die Ecken des Feldes zu weit aus einander kommen würden; sondern man muß die Entfernung beyder Ecken so messen, wie in der ersten Frage gezeigt worden. Es ist hiebey noch zu bemerken, daß auf einem Berge nicht mehr Bäume stehen können, als auf einer Ebene, welche so groß ist, als die Grundfläche des Berges, weil die Bäume alle senkrecht gegen der Grundfläche wachsen.

Anmerk. 3. Wenn man in dem Felde ABCDEFG kommen, und nach Gefallen darinn messen kann: so kann man einen Punkt in dem Felde annehmen, und alle Seiten desselben CD, DE ꝛc. nach der ersten Aufgabe Lit. a. finden. Kann man aber aus zweyen Standpunkten alle Winkel eines Feldes übersehen, so lassen sich die Längen der Seiten und ihre Lagen gegen einander nach der 1. Aufg. Lit. b. finden; und auf diese Art können ganze Gegenden in Grund gelegt werden.

### 6. Wie kann man die Körper eintheilen?

1) In Ansehung der Beschaffenheit der Flächen, welche sie einschließen, in Körper mit ebenen und gekrümmten Oberflächen.

2) In Ansehung der Flächen, die entweder einander alle, oder zwey gegen über stehende gleich sind, oder auch wo diese, oder gar alle ungleich sind.

### 7. Was für Körper kommen vorzüglich in Betrachtung?

Prismen, Pyramiden, Kugeln.

Das Prisma, Tab. IV. Fig. 1., wird unten und oben von zwoen gleichen Flächen eingeschlossen

geschlossen. Die Seitenflächen sind Parallelogramme, so viel an der Anzahl, als Seiten an der Grundfläche sind. Wenn man die Mittelpunkte M und N der obern und untern Flächen mit einer geraden Linie MN verbindet: so steht diese entweder auf dem untern Mittelpunkte senkrecht, oder schief. Im ersten Falle erhält man ein senkrechtes Prisma, im zweyten ein schiefes. Zu den Prismen rechnet man auch die Cylinder Fig II., d. i. Körper, welche von zweyen gleichen Zirkelflächen AB und EF und einer gekrümmten Seitenfläche eingeschlossen werden; und es giebt senkrechte und auch schiefe Cylinder, nachdem die gerade Linie MN, welche die beyden Centra M und N verbindet, aufs untere Centrum senkrecht oder schief stehet. Bey senkrechten Prismen und senkrechten Cylindern giebt diese Linie die Höhe der Körper. Bey dergleichen schiefen Körpern findet man die Höhe, wenn man vom obern Mittelpunkte auf die, wenn es vonnöthen, verlängerte Grundfläche einen Perpendikel fallen läßt. Unter den senkrechten Prismen verdient besonders bemerkt zu werden:

a) Der Würfel, oder Cubus Fig. III., welcher in allem von sechs Quadraten eingeschlossen ist.

b) Der

b) Der Balken, Fig. IV., oder ein solches senkrechtes Parallepipedum, welches von sechs Rechtecken, deren zwey gegen über stehende gleich sind, eingeschlossen wird.

2. Die Pyramide Fig. V. hat nur eine Grundfläche; die Seitenfläche bestehet aus so vielen oben an der Spitze E zusammenstossenden Dreyecken, als die Grundfläche BDC Seiten hat. Wenn man die Spitze E der Pyramide mit dem Mittelpunkt M der Fläche verbindet, so steht diese Linie EM entweder auf dem Mittelpunkt senkrecht oder schief. Im ersten Falle hat man eine senkrechte Pyramide, im andern eine schiefe.

Zu den Pyramiden rechnet man die Kegel Fig. VI., d. i. Körper, die oben zugespitzt, eine Cirkelfläche zur Grundfläche haben, und deren Seitenfläche gekrümmt und oben zugespitzt ist; und es giebt senkrechte, imgleichen schiefe Kegel, nachdem die gerade Linie CM, welche die Spitze C und das Centrum M des Cirkels AEDB verbindet, auf dem Centro senkrecht oder schief stehet. Bey senkrechten Pyramiden und Kegeln giebt diese Linie CM die Höhe der Körper. Man findet die Höhe der Schiefen, wenn man von der Spitze auf die, wenn es vonnöthen ist,

verlängerte Grundfläche einen Perpendikel fallen läßt.

Anmerkung. Wenn man einen senkrechten Kegel so schnitte, daß der Schnitt durch die Spitze C und das Centrum M des Zirkels lief, und auf dessen Diameter AD senkrecht gerichtet wäre: so würde die innere Seite des halben Kegels durch ein gleichschenklichtes Dreyeck dargestellt, und das Perpendikel aus der Spitze aufs Centrum wäre die Höhe des Kegels; und die entgegen gesetzte Hypotenuse nennt man die Seite des senkrechten Kegels.

3. **Die Kugel** oder Sphäre Fig. VII., welche von einer eigenen gekrümmten Fläche, in welcher alle Punkte von dem Mittelpunkte gleiche Entfernung haben, eingeschlossen ist.

### 8. Wie wird der Inhalt eines Körpers gemessen?

1) **Ueberhaupt** wird ein Körper von bestimmter Größe, welcher wieder in kleinere gleiche Körper eingetheilet wird, zum Maaßstabe angenommen, und alsdann gefunden, wie vielmal dieser Körper oder seine Theile in dem Körper, dessen Inhalt soll gemessen werden, enthalten sey.

2) Insonderheit wird das Cubikmaaß oder der körperliche Inhalt

a) eines Würfels Fig. 3. also gefunden: Es wird 1. eine Seite CE des gegebenen Würfels nach dem Längenmaaße gemessen; 2. wird das Längenmaaß dieser Seite mit sich selbst vermehret, und 3. das gefundene Product wieder mit demselben Längenmaaße vermehret. Dieses Product giebt den gesuchten körperlichen Inhalt des Würfels. Z. E. es sey die Seite eines Würfels 4°2′5″, so ist die Rechnung folgende:

| | |
|---|---|
| 425″ | Längenmaaß einer Seite |
| 425 – | des Würfels. |
| 2125 | |
| 850 | |
| 1700 | |
| 18°06′25″ | Quadratmaaß einer Fläche des Würfels. |
| 425 | |
| 903125 | |
| 361250 | |
| 722500 | |
| 76°,765′,625″ | Cubikmaaß des ganzen Würfels. |

Anmerk. Man rechnet auf einen Cubikfuß 1000 Cubikzölle ꝛc. Es müssen also für die Cubikzölle und Cubikfüße allezeit drey Ziffern genommen werden.

b) Eines Prisma Fig. I., oder Cylinders Fig. II., wenn man die Grundfläche DFE des Prisma, oder die Zirkelfläche EF des Cylinders mit der Höhe MN multipliciret.

c) Eines Balkens Fig. IV., wenn man die Länge EC, Breite CD, und Höhe DB durch einander multipliciret.

Anmerk. Es kann auf solche Weise der körperliche Inhalt eines Korn- Stroh- Heuhaufens, einer Mauer gefunden, und daraus z. E. bestimmet werden, wie viel Scheffel Korn ein Kornhaufen enthalte, wenn man nur vorher ausgemacht hat, wie viel Cubikfüße und Zölle ein Scheffel enthält.

d) Einer Pyramide oder Kegels. Es wird 1. der Inhalt der Grundfläche wie vorhin gefunden; 2. wird derselbe mit dem dritten Theile der Höhe vermehret, oder es wird der dritte Theil der Grundfläche

fläche mit der ganzen Höhe vermehret, oder es wird die ganze Grundfläche mit der ganzen Höhe vermehret, und das Product durch 3 zertheilet. In allen dreyen Fällen bekömmt man den körperlichen Inhalt der Pyramide oder des Kegels.

e) Einer **Kugel**. Es wird 1. aus dem Durchmesser der Kugel die Peripherie gefunden; 2. wird diese Peripherie mit dem Durchmesser vermehret: das Product giebt den Inhalt der Kugelfläche, oder der ganzen Fläche, welche die Kugel einschließt; 3. wird diese Kugelfläche mit dem sechsten Theile des Durchmessers, oder der sechste Theil der Kugelfläche mit dem ganzen Durchmesser vermehret, oder es kann auch die ganze Kugelfläche mit dem ganzen Durchmesser vermehret, und das Product hernach mit 6 getheilet werden. In allen dreyen Fällen findet man den körperlichen Inhalt der Kugel. Z. E. der Durchmesser der Erde, welche beynahe kugelrund ist, enthält 1714 **geographische oder deutsche Meilen.** Hieraus kann die Größe der Oberfläche der Erde sowohl, als ihr körperlicher Inhalt also berechnet werden:

113 : 355 = 1714.
355 |

8570
8570
5142

113) 608470 | 5384,7

113) 608470 | 55384,7 Meilen-Umkreis
1714 der Erde.

215388
53847
376929
53847

922937),8 Quadratmeilen,
1714 Oberfläche d. Erde.

369175032
92293758
646056306
92293758

6) 1581915011 21,2 | 263652502 0,

6 Cubikmeilen, körperlicher Inhalt der Erde.

Anmerkung. Die Zahlen hinter dem Comma sind Decimalbrüche, welche das Zehnte einer Meile beynahe angeben.

Wenn

Wenn man nicht so genau, als hie geschehen, rechnen wollte: so fände sich auch die Kugel folgender Maaßen: 1) Man vermehre den Diameter zweymal mit sich selbst; 2) zu den Zahlen 300, 157, und dem Würfel des Diameters suche man vermittelst der Regel de Tri den vierten Proportional-Terminus. Dieser wird der Inhalt der Kugel seyn.

Anmerk. Der körperliche Inhalt ganz irregulärer Körper kann gefunden werden, wenn man sie in ein reguläres Gefäß mit Wasser, oder feinem Sande versenket; die Höhe des Wassers oder Sandes in dem Gefäße bemerket, hierauf den Körper wieder herauszieht, und den körperlichen Inhalt des Raumes mißt, um welchen das Wasser oder der Sand gefallen ist: dieser Raum ist dem gesuchten Inhalte des Körpers gleich.

### 9. Wie findet man die Seitenfläche eines Würfels, Balkens, senkrechten Cylinders, senkrechten Kegels, und wie die Fläche der Kugel?

Man findet die Seitenflächen 1) eines Würfels Fig. III, wenn man das Quadrat CDFE, dessen Seite die Seite des Würfels ist, durch die Zahl 4 multipliciret.

Des Balkens Fig. IV., wenn dessen Höhe EC durch den Umfang EFGH der Grundfläche multipliciret wird.

3) Des senkrechten Cylinders Fig. II., wenn dessen Peripherie EF mit der Höhe MN multipliciret wird.

4) Des senkrechten Kegels Fig. VI., wenn man die Peripherie ACDE durch die halbe Seite des Kegels CA multiplicirt.

5) Die Fläche der Kugel, wenn man den Diameter durch die Peripherie multiplicirt.

Anmerk. Will man die ganze Fläche der eben benannten vier Körper wissen, so muß man zu der gefundenen Seitenfläche des Würfels, des Balkens, des senkrechten Cylinders, das doppelte der Grundfläche, und zu der gefundenen Seitenfläche des senkrechten Kegels die Grundfläche addiren.

---

Ver-

# Verzeichniß

derjenigen Bücher, welche zum Gebrauche der Schulen im Hochstifte Münster, auf höchsten Landesherrlichen Befehl, mit gnädigsten Privilegien, von dem Hofbuchhändler Perrenon bisher verleget worden.

Lateinische Sprachkunst, zum Gebrauche der ersten und zweyten Schule. 8.

Lateinische Sprachkunst, zum Gebrauche der dritten Schule. 8.

Deutsche und lateinische Chrestomathie, zum Gebrauche der ersten und zweyten Schule. 8.

Deutsche und lateinische Chrestomathie, zum Gebrauche der dritten Schule. 8.

Oratorische, deutsche und lateinische Chrestomathie, zum Gebrauche der vierten und fünften Schule. 8.

Mathematische Vorübungen, zum Gebrauche der ersten und zweyten Schule. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Zumkley (Caspar.) Matheſeos elementaris principia, prælectionibus publicis Scholarum inferiorum Patriæ Monaſterienſis accommodata. Pars Ima. Algebra elementaris. 8.

— — Matheſeos elementaris principia, prælectionibus &c. Pars IIda. Geometria elementaris & Trigonometria. 8.

— — Matheſeos elementaris principia, prælectionibus publicis Scholarum &c. Pars IIItia.

Uſus

Usus Algebræ in Arithmetica, Geometria & Trigonometria; accedit Canon Logarithmicus, Sinuum Tangentium & numerorum naturalium. 8.

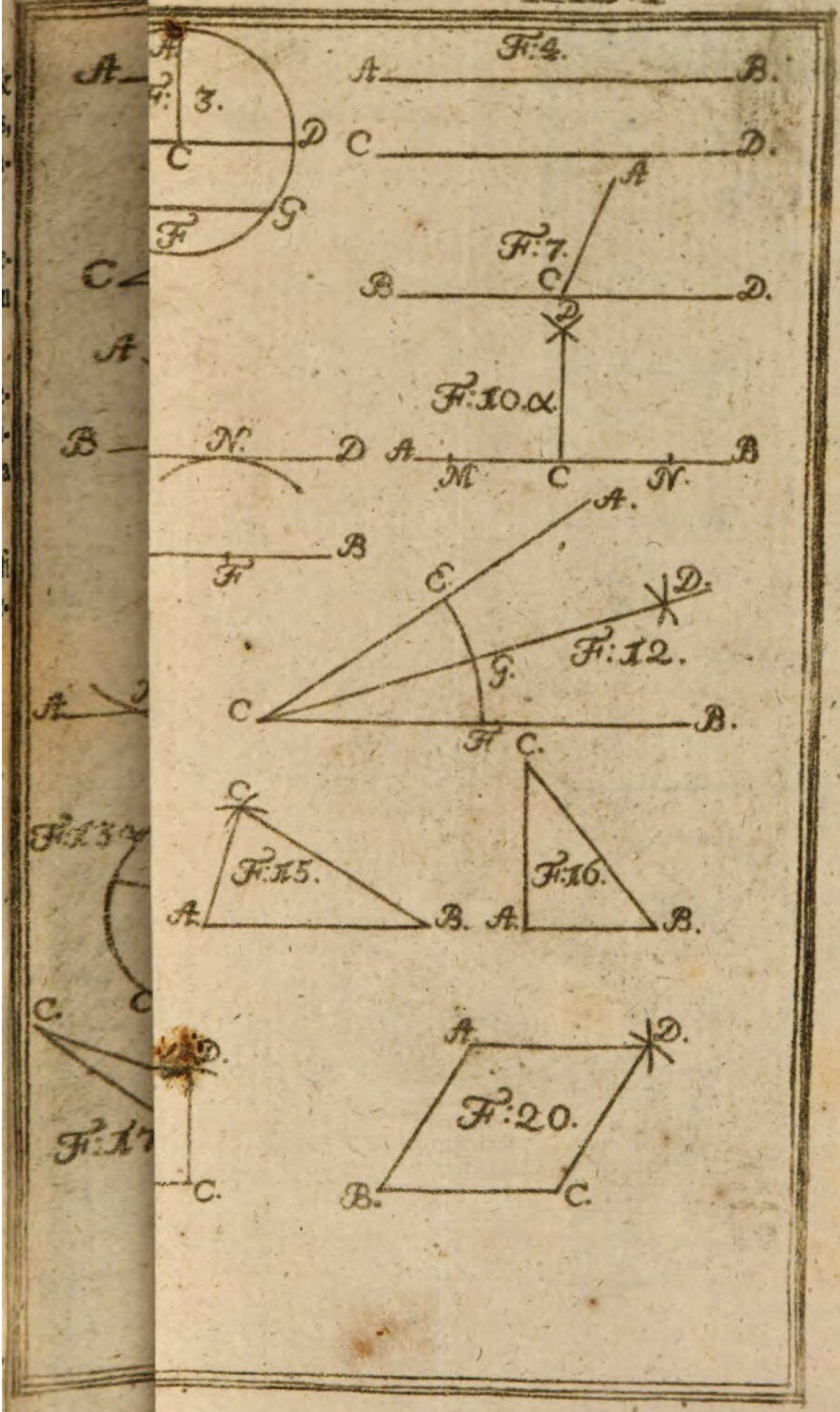
Zumkley (Caspar.) Elementa Mechanices, prælectionibus publicis Scholarum superiorum Patriæ Monast. accommodata. 8.

— — Matheseos sublimioris principia, prælectionibus publicis scholarum superiorum patriæ Monasteriensis accommodata. Pars Ima Mathesis finitorum. 8.

— — Exercitationes syntheticorum mathesi pura: illustrandæ cum primis Geometriæ veterum. Editio IIda cum Fig. 8. 1783.

Kistemakers lateinische Sprachlehre. 8. 1786.

TAB:I



Usus Algebræ in Arithmetica, Geometria & Trigonometria; accedit Canon Logarithmicus, Sinuum Tangentium & numerorum naturalium. 8.

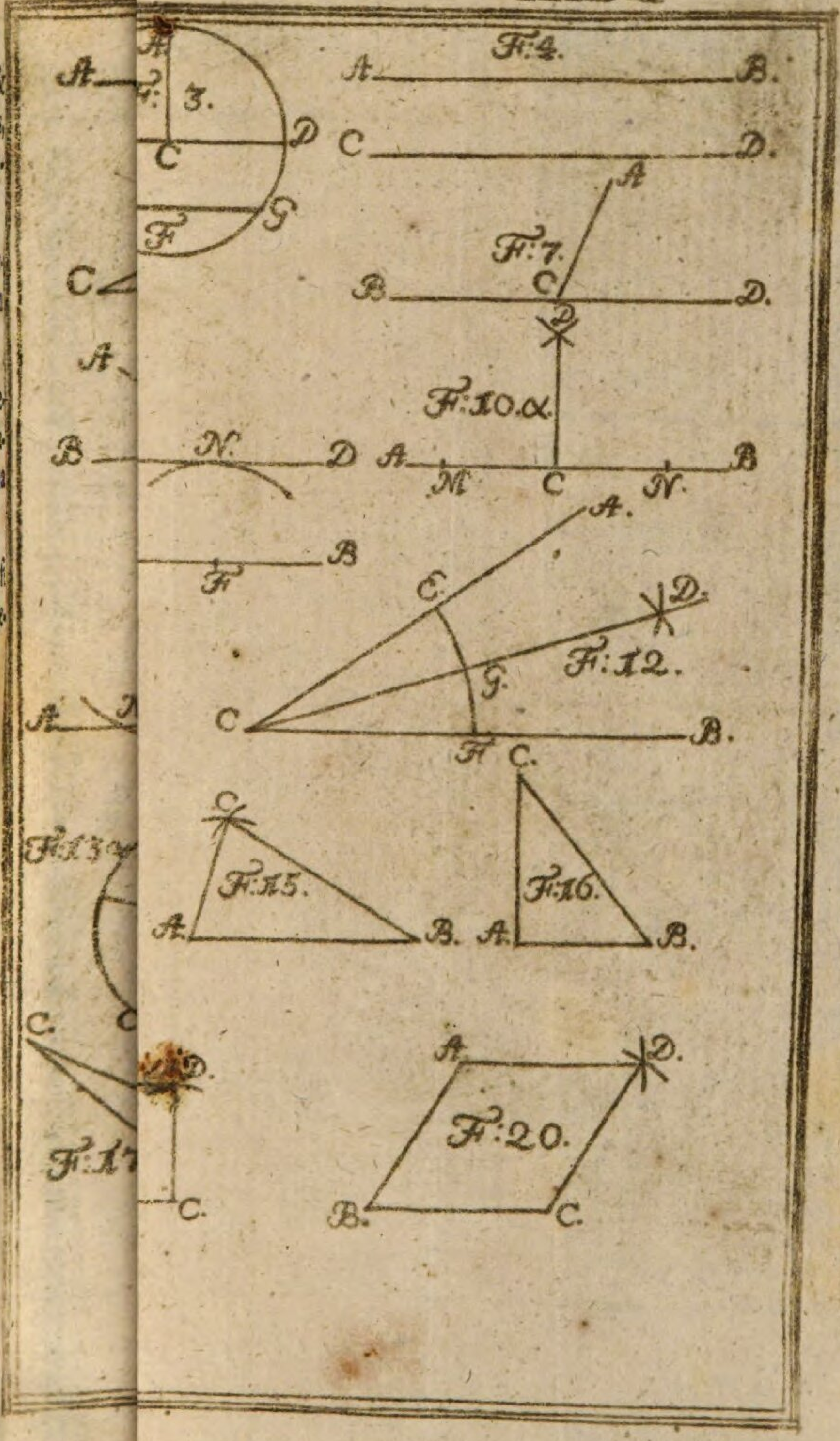
Zumkley (Caspar.) Elementa Mechanices, prælectionibus publicis Scholarum superiorum Patriæ Monast. accommodata. 8.

— — Matheseos sublimioris principia, prælectionibus publicis scholarum superiorum patriæ Monasteriensis accommodata. Pars Ima Mathesis finitorum. 8.

— — Exercitationes syntheticorum mathesi pura: illustrandæ cum primis Geometriæ veterum. Editio IIda cum Fig. 8. 1783.

Kistemakers lateinische Sprachlehre. 8. 1786.

TAB:I


F:4.
A B.
C D.
F:7.
B C D. A
F:10.α.
D
A M C N B
F:12.
C E G F B. A. D.
F:15.
C A. B.
F:16.
C. A. B.
F:20.
A. D. B. C.
F:13.
F:17.
3.

TAB:II

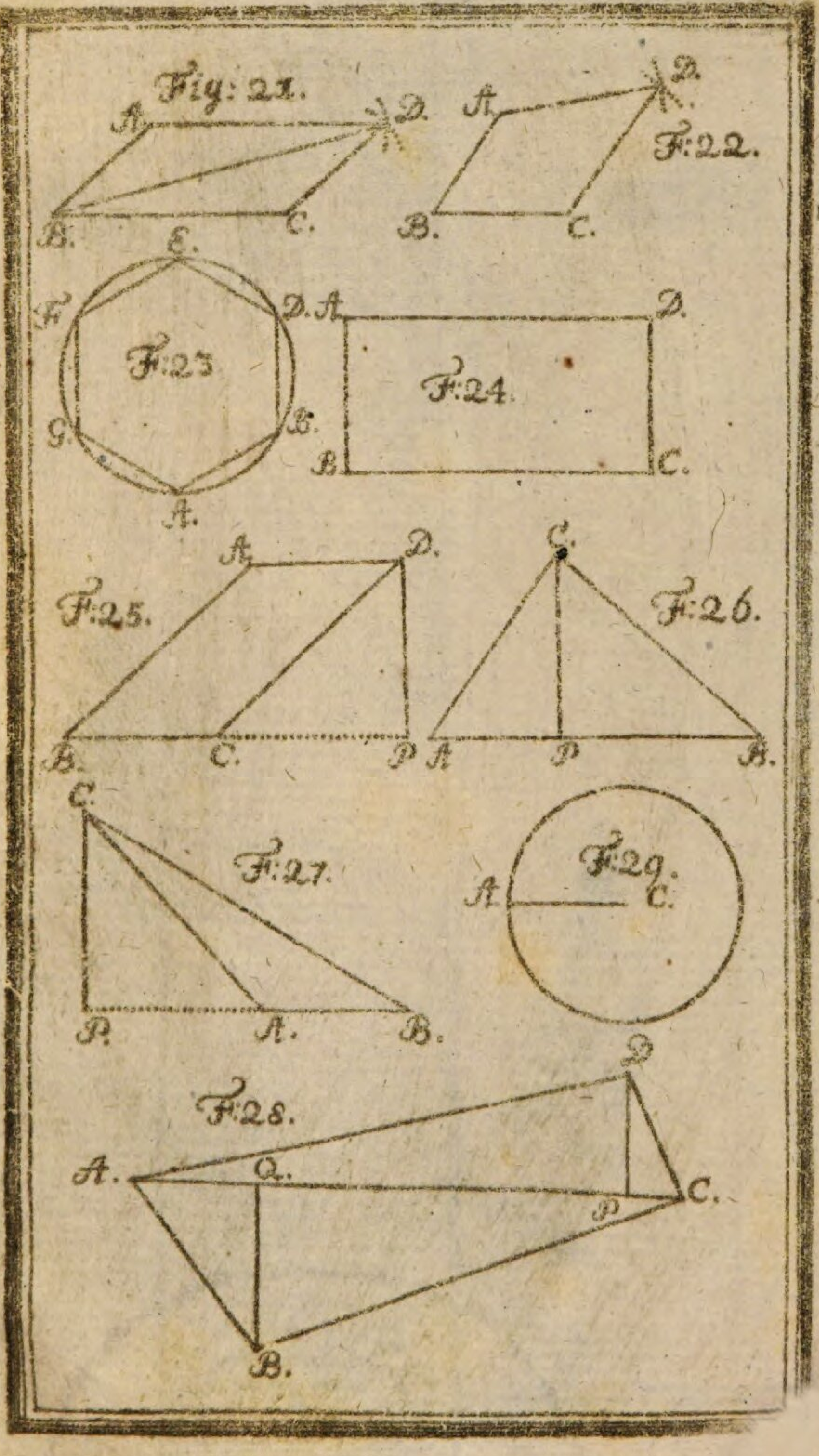
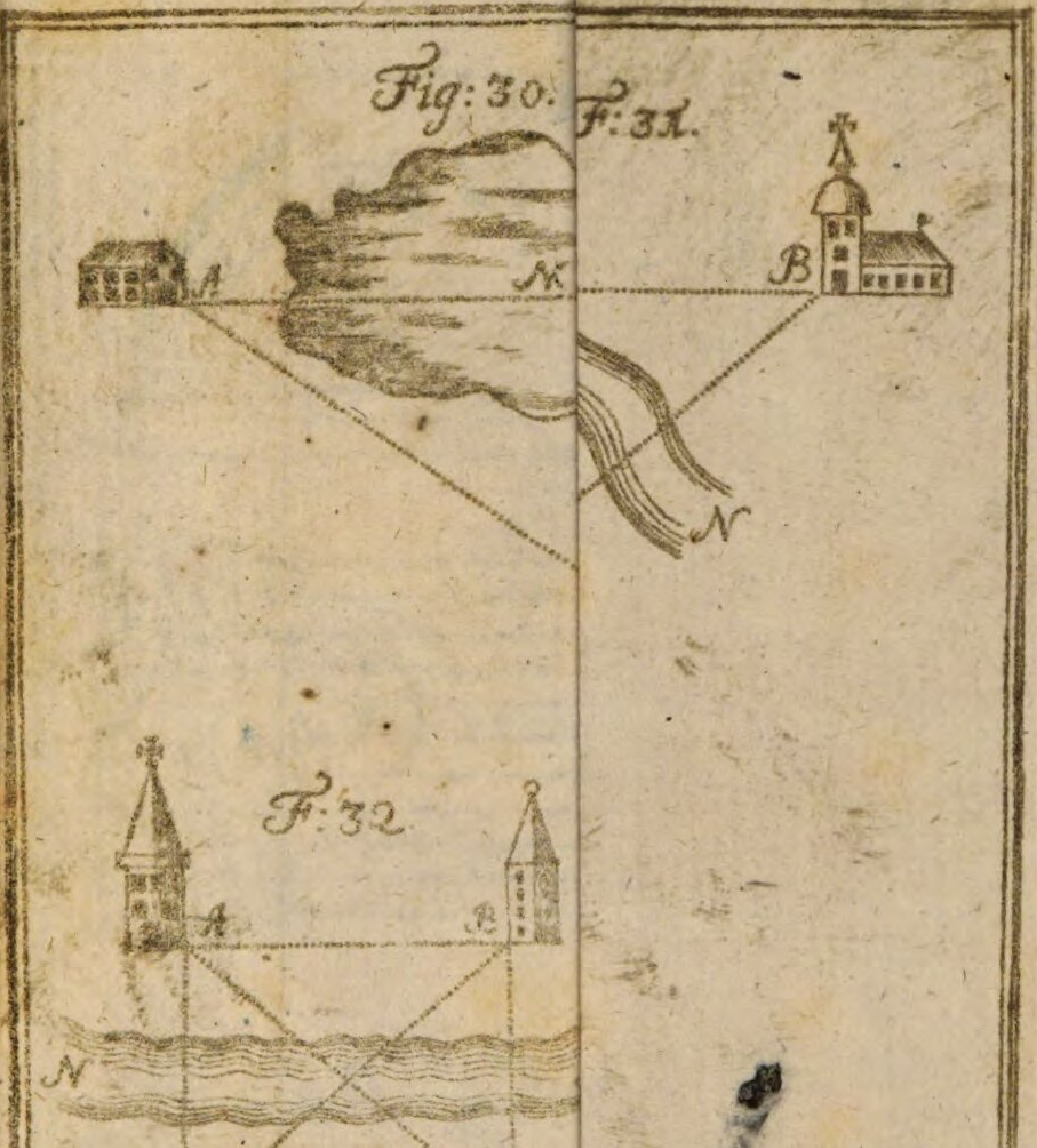
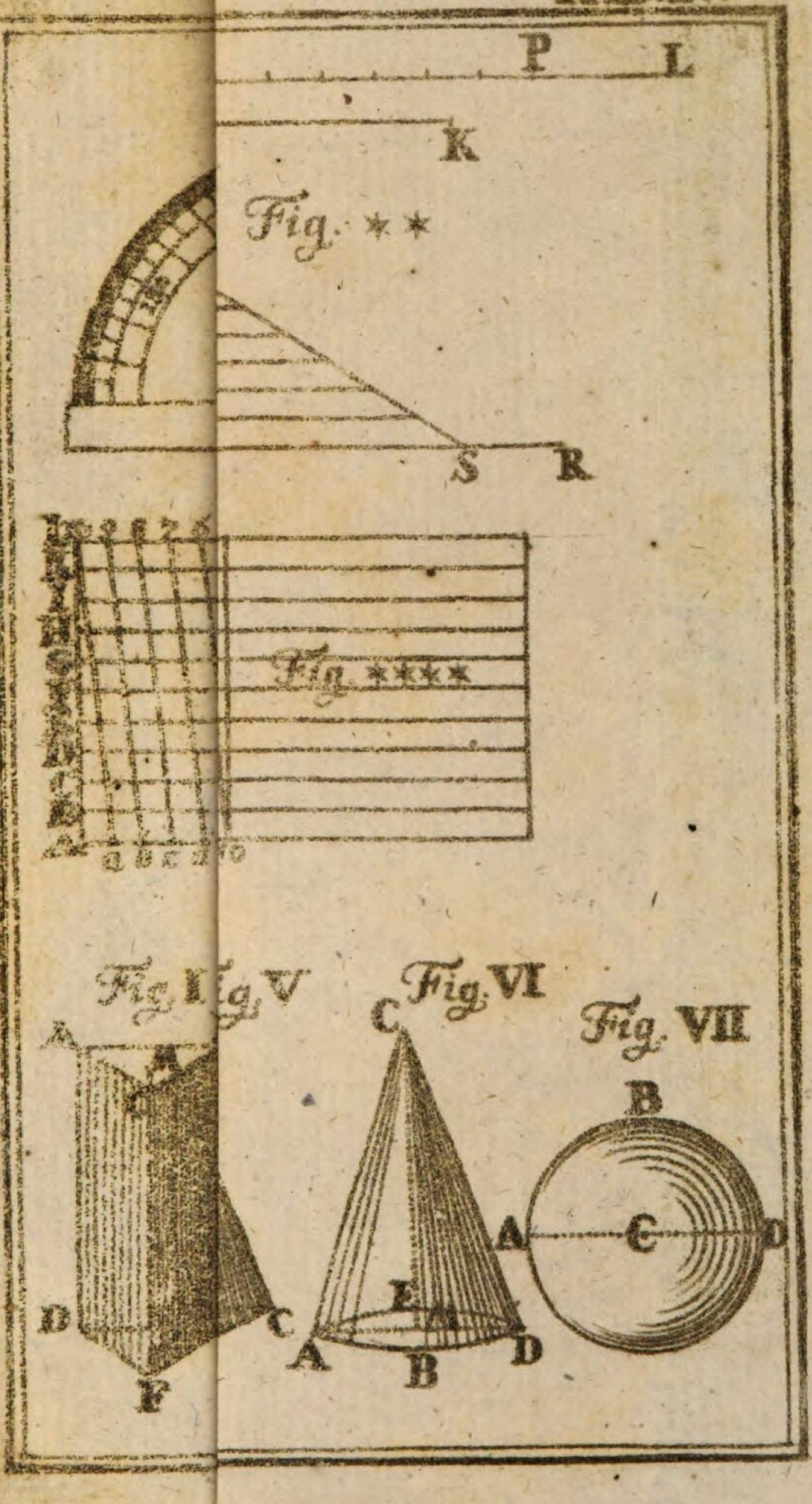


Fig: 21.
A.
D.
B.
C.
A.
D.
F:22.
B.
C.
E.
F.
D.
F:23
B.
G.
A.
A.
D.
F:24.
B.
C.
A.
D.
C.
F:25.
F:26.
B.
C.
P
A
P
B.
C.
F:27.
F:29.
A.
C.
P.
A.
B.
D.
F:28.
A.
Q.
C.
P
B.

TAB:III



TAB. IV.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Zumkley, Kaspar,

Mathematische Vorübungen

Münster 1789

Math.p. 625
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083048-7
VD18 13621092-002